Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

5. April 2004

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $\varphi\colon \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $\varphi(f)(t) = f(t)\cos(t)$ ist linear.

2) Welchen Kern hat die lineare Abbildung $\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ mit $\vec{v} \mapsto \vec{v} + \vec{v}$?

3) In der 10×10-Matrix A sei $a_{ij} = 2i + 3j$. Was ist $\det A$?

4) *Richtig oder falsch:* $\varphi\colon V \to V$ sei eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Dann ist $\operatorname{Kern}\varphi \cap \operatorname{Bild}\varphi = \{\vec{0}\}$.

5) *Richtig oder falsch:* Die Vektoren $\binom{1}{i}$ und $\binom{1}{-i}$ bilden eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^2$.

6) Unter welchen Bedingungen an $a, b, c \in \mathbb{R}$ bilden $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ a+b+c \end{pmatrix}$ *keine* Basis des $\mathbb{R}^3$?

7) Was ist $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\operatorname{div}\begin{pmatrix} \sin^2 x \\ \cos^3 y \\ e^{4z} \end{pmatrix}$?

8) *Richtig oder falsch:* Für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verschwindet die Hesse-Matrix $H_f(x,y,z)$ genau dann identisch, wenn es reelle Zahlen a, b, c, d gibt mit $f(x,y,z) = ax + by + cz + d$.

9) Was ist $\iint_{\mathcal{K}} dx\,dy$ für $\mathcal{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le \sin x\right\}$?

10) Welchen Korrelationskoeffizienten haben die Zahlenpaare $(\sinh^2 n, \cosh^2 n)$ für $n = -100$ bis $n = 100$?

Aufgabe 1: (*9 Punkte*)
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V \le \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sei erzeugt von der Menge

$$M = \left\{1, \sinh x, \cosh x, e^x, \sinh^2 x, \sinh x \cosh x, \cosh^2 x, e^{2x}\right\}.$$

a) Zeigen Sie: Die Funktionen $1, e^x, e^{-x}, e^{2x}$ und e^{-2x} bilden eine Basis von V !
Hinweis: Berechnen Sie $(\cosh x - \sinh x)^2$ auf zwei Arten!

b) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B} \subseteq M$ von V !

c) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi\colon V \to V;\ f \mapsto f'' - 4f$ ist linear.

d) Bestimmen Sie Basen von $\operatorname{Kern}\varphi$ und $\operatorname{Bild}\varphi$!

e) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $e^{-2x}, e^{-x}, 1, e^x, e^{2x}$ von V?

f) Welchen Rang hat die hundertste Potenz dieser Abbildungsmatrix?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}(a+1)x + 2y + 3az &= 6a \qquad (1)\\ (2a+2)x - \;\; y - 4az &= -3a \qquad (2)\\ (3a+3)x + 2y + 2az &= 9a \qquad (3)\end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 12 & -24 & -7 \\ -5 & 10 & 17 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$F\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xe^x + ye^x \end{cases} !$$

b) Unter welchen Bedingungen kann die Gleichung $F(x,y) = 0$ in der Umgebung des Punkts (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$ nach y aufgelöst werden, und welche Ableitung hat die entstehende Funktion $y = f(x)$?

c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f'(x)$!

Aufgabe 5: *(3 Punkte)*
Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad drei um den Punkt $(0,0)$ für

$$f(x,y) = 1 + e^{x-y}\cos(x+y)\,!$$

$\mathcal{H\ I\ L\ F\ S\ M\ I\ T\ T\ E\ L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

$\mathcal{H\ I\ N\ W\ E\ I\ S\ E}$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.