

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22. Januar 2004

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ habe unter anderem die Eigenwerte ± 1 mit algebraischer Vielfachheit eins, $2 + 3i$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $-3 + 5i$ mit algebraischer Vielfachheit drei; die geometrische Vielfachheit sei jeweils eins.

- Was ist $\det A$?
- Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten einer Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$?
- Welche dieser Möglichkeiten wird am häufigsten zu beobachten sein?
- Schreiben Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 0$$

um in ein äquivalentes System von Differentialgleichungen erster Ordnung und bestimmen Sie so ihre Lösung!

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) - \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t) = 0!$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 6\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + y(t) = 0!$$

- Bestimmen Sie Basen sowohl für den reellen als auch den komplexen Lösungsraum der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - 4y^{(3)}(t) + 8\ddot{y}(t) - 8\dot{y}(t) + 4y(t) = 0!$$

Hinweis: $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$

- Bestimmen Sie die sämtlichen reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = 40 \sin 3t \quad (1)$$

$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = \cos t \quad (2)$$

$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 80 \sin 3t \quad (3)$$

$$y^{(4)}(t) - 16y(t) = 80 - 48t \quad (4)$$

$$y^{(4)}(t) + 8\ddot{y}(t) + 16y(t) = 400 \quad (5)$$

- Formen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 2t \cdot (y(t) - 2)$ mit $y(0) = 1$ um in eine Fixpunktgleichung, und berechnen Sie die ersten Iterationen! Erraten Sie anhand dieser die Lösungsfunktion, und bestätigen Sie dies durch Einsetzen!