Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15. Januar 2004

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$!

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{C}^2$ aus *reellen* Eigenvektoren von C ?

c) Was ist e^C *bzw.* e^{Ct} ?

d) Berechnen Sie $e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}}$!

e) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ${}^tAA$ symmetrisch.

f) Mit welchen komplexen Zahlen a, b, c wird $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & a \\ b & 2 & 3-i \\ 1-2i & c & 3 \end{pmatrix}$ eine Hermitesche Matrix?

g) Welche der folgenden Matrizen A_n sind symmetrisch, welche Hermitesch? Von welchen wissen Sie, daß $\mathbb{R}^4$ eine Basis aus Eigenvektoren von A_n hat?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 2i & 3i & 4i \\ 2i & 3i & 4i & 5i \\ 3i & 4i & 5i & 6i \\ 4i & 5i & 6i & 7i \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & -1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ -i & i & -i & i \\ -i & i & i & i \\ -i & -i & -i & i \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

h) *Richtig oder falsch:* Hat der Hauptraum zum Eigenwert λ die Dimension r, so gibt es mindestens einen Hauptvektor der Stufe r.

i) *Richtig oder falsch:* Falls es zum Eigenwert λ einen Hauptvektor der Stufe r gibt, hat der Hauptraum mindestens die Dimension r.

j) *Richtig oder falsch:* Falls die Differenz zweier Hauptvektoren der Stufe r ungleich dem Nullvektor ist, ist sie selbst ein Hauptvektor der Stufe r.

k) Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}!$$

l) n sei eine natürliche Zahl. Was ist A^n für die gerade betrachtete Matrix?

m) Was ist e^{At} ?

n) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) - 3x(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= \quad x(t) + 2y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= \quad 2x(t) + 2y(t) + z(t)\,! \end{aligned}$$

o) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = z(0) = 1$ und $y(0) = 0$!

p) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(3) = z(3) = 1$ und $y(3) = 0$!

q) Welche Lösungen des Differentialgleichungssystems bleiben beschränkt für $t \to \infty$?