Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8. Januar 2004

a) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$, $e^{\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}}$, $e^{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}}$!

Lösung: Der erste Exponent ist eine Diagonalmatrix; da die k-te Potenz der Diagonalmatrix mit Einträgen $d_1, \dots, d_n$ einfach die Diagonalmatrix mit Einträgen $d_1^k, \dots, d_n^k$ ist, folgt

$$e^{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}e&0&0\\0&e^2&0\\0&0&e\end{pmatrix}.$$

Die zweite Exponentenmatrix ist eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen; also sollten nur endlich viele ihrer Potenzen von der Nullmatrix verschieden sein. In der Tat ist

$$A = \begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad A^3 = A^4 = \cdots = 0,$$

also

$$e^A = E + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix}1&1&\frac{7}{2}\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Für die Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ schließlich legt die Berechnung der zweiten und dritten Potenz nahe, daß $B^n = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\n&1\end{smallmatrix}\right)$ sein sollte, was sich auch leicht durch vollständige Induktion nachweisen läßt: Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial, und auch der Induktionsschritt macht keine Schwierigkeiten:

$$B^{n+1} = B^n \cdot B \underset{\text{Ind. Ann.}}{=} \begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\n+1&1\end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B^k = \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} & 0\\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} & 0\\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!} & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e&0\\e&e\end{pmatrix}.$$

b) *Richtig oder falsch:* $e^A \cdot e^{(A^2)} = e^{(A^2)} \cdot e^A$.

Lösung: *Richtig,* denn $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = A^3$, und für kommutierende Matrizen kommutieren auch die daraus durch Anwendung der Exponentialfunktion entstehenden.

c) Für eine $n \times n$-Matrix A sei $\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$ und $\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$. Finden Sie eine Matrix $P \neq 0$, so daß für alle $n \times n$-Matrizen A und alle $r \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(A + rP) = \sin A \quad \text{und} \quad \cos(A + rP) = \cos A.$$

Lösung: Die Periodizität des klassischen Sinus und Kosinus kann via die Additionsformeln darauf zurückgeführt werden, daß $\cos 2\pi = 1$ und $\sin 2\pi = 0$ ist. Diese Additionsformeln folgen via EULERsche Formeln aus der Regel $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, und diese gilt auch für *miteinander kommutierende* Matrizen X und Y.

Da Vielfache der Einheitsmatrix mit jeder anderen Matrix kommutieren, gilt also insbesondere für jede Matrix A und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, daß

$$\sin(A+\lambda E) = \sin A \cos\lambda E + \cos A \sin\lambda E \quad \text{und} \quad \cos(A+\lambda E) = \cos A \cos\lambda E - \sin A \sin\lambda E\,.$$

Speziell für $\lambda = 2\pi$ ist $e^{2\pi i E} = E$, also $\sin 2\pi E = 0$ und $\cos 2\pi E = E$, so daß wir $P = 2\pi E$ setzen können.

d) *Richtig oder falsch:* Die Eigenwerte der Matrix $2A$ sind doppelt so groß wie die von A.

Lösung: *Richtig,* denn $\det(2A - 2\lambda E) = \det\big(2(A-\lambda E)\big) = 2^n \det(A-\lambda E)$ für eine $n \times n$-Matrix A.

e) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & -3 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2-\lambda & -3 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\big((2-\lambda)(11-\lambda) - 12\big) + 2(\lambda - 11 + 8) + 4\big(3 - 2(2-\lambda)\big) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 13\lambda + 10) + 10\lambda - 10 = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 13\lambda \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 13) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-13)\,.
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $0, 1$ und 13.

Für den Eigenwert Null müssen wir die Gleichung $A\vec{v} = \vec{0}$ lösen; da die erste und die zweite Spalte der Matrix entgegengesetzt gleich sind, sind die Lösungen offenbar gerade die Vielfachen des Vektors

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beim Eigenwert eins müssen wir das Gleichungssystem

$$-y + 2z = 0, \qquad -2x + y - 3z = 0 \quad \text{und} \quad 4x - 4y + 10z = 0$$

lösen. Wie die erste Gleichung zeigt, ist $y = 2z$; damit werden die beiden anderen Gleichhungen zu

$$-2x - z = 0 \quad \text{und} \quad 4x + 2z = 0\,,$$

d.h. $z = -2x$. Setzen wir $x = 1$, wird $z = -2$ und $y = -4$, der Eigenraum wird also erzeugt von

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Für den dritten Eigenwert schließlich erhalten wir das System

$$-12x - y + 2z = 0, \qquad -2x - 11y - 3z = 0 \quad \text{und} \quad 4x - 4y - 2z = 0\,.$$

Subtraktion von sechsmal der zweiten Gleichung von der ersten und zweifache Addition der zweiten Gleichung zur dritten ergibt die beiden Gleichungen

$$65y + 20z = 0 \quad \text{und} \quad -26y - 8z = 0\,,$$

die beide äquivalent sind zur Gleichung $4z = -13y$. Setzen wir also $z = 13$, wird $y = -4$. Beides eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $4x = 4y + 2z = -16 + 26 = 10$, also $x = 2\frac{1}{2}$. Um eine ganzzahlige Lösung zu bekommen, multiplizieren wir um besten noch alle Variablen mit zwei und erhalten dann als dritten Eigenvektor

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

f) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ 3 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$!

Lösung: Nach der SARRUSschen Regel ist

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ 3 & -4-\lambda & -5 \\ -2 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) - 60 - 72 - 12(-4-\lambda) + 20(5-\lambda) + 18(5-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda - 100 - 132 - 26\lambda + 238 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6\,. \end{aligned}$$

Falls alle Lösungen ganzzahlig sind (was bei Übungsaufgaben recht häufig der Fall ist), sind sie nach dem Wurzelsatz von Viète Teiler von sechs, Kandidaten für Eigenwerte sind also $\pm1, \pm2$ und ±3. Da sowohl das Produkt als auch die Summe (Koeffizient von λ^2) sechs sind, erwarten wir die drei Nullstellen $1, 2, 3$, wovon man sich durch Einsetzen auch leicht überzeugt.

Für die Eigenvektoren zum Eigenwert eins erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$4x - 6y - 6z = 0, \qquad 3x - 5y - 5z = 0 \quad \text{und} \quad -2x + 4y + 4z = 0\,;$$

da die Koeffizienten von y und z in allen drei Gleichungen übereinstimmen, wird der Lösungsraum aufgespannt vom Vektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Das LGS für $\lambda = 2$ ist

$$3x - 6y - 6z = 0, \qquad 3x - 6y - 5z = 0 \quad \text{und} \quad -2x + 4y + 3z = 0\,;$$

hier ist der Koeffizient von y stets das -2-fache des Koeffizienten von x, der Lösungsraum wird also aufgespannt von

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Im Falle $\lambda = 3$ schließlich müssen wir das System

$$2x - 6y - 6z = 0, \qquad 3x - 7y - 5z = 0 \quad \text{und} \quad -2x + 4y + 2z = 0$$

lösen, was anscheinend nicht ganz ohne Rechnung geht. Addition der zweiten Gleichung zur dritten zeigt, daß $-2y - 4z = 0$ oder $y = -2z$ ist; eingesetzt in die dritte Gleichung führt dies zu $-2x - 6z = 0$ oder $x = -3z$. Setzen wir also $z = -1$, wird $x = 3$ und $y = 2$. Durch Einsetzen überzeugen wir uns, daß dies alle drei Gleichungen löst; der Eigenraum zum Eigenwert drei wird also aufgespannt von

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

g) Was ist e^B ?

Lösung: Bezüglich der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ hat die Matrix B die Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} , \text{ und } \quad e^D = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} .$$

Die Basis aus $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ entsteht aus der Standardbasis durch Multiplikation mit jener Matrix M, deren i-te Spalte gleich $\vec{v}_i$ ist, d.h. mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Also ist $D = M^{-1}BM$ und damit $B = MDM^{-1}$ und $e^B = Me^DM^{-1}$. Wir müssen also die Matrix M^{-1} berechnen; dies geschieht durch simultane Anwendung des GAUSS-Algorithmus auf die drei Spalten der Einheitsmatrix als rechte Seiten eines LGS mit Matrix M: In

$$\begin{array}{rrr} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

müssen wir, um links eine Einheitsmatrix erhalten zu können, zunächst die ersten beiden Zeilen vertauschen:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Als nächstes addieren wir die (neue) erste Zeile zur dritten;

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Zur Vermeidung von Brüchen empfiehlt es sich, noch die zweite und dritte Zeile zu vertauschen bevor wir die linke Seite auf untere Dreiecksgestalt bringen; die Dreiecksgestalt entsteht dann durch Subtraktion von zweimal der jetzt noch zweiten von der jetzt noch dritten Zeile:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}$$

Um links eine Einheitsmatrix zu erhalten, müssen wir zunächst die zweite Zeile von der ersten subtrahieren

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{array} ,$$

sodann die dritte von der ersten und von der zweiten:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}.$$

Somit ist

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$e^B = M \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} -2e^2 + 3e^3 & -6e^3 + 6e^2 & -6e^3 + 6e^2 \\ -e^2 - e + 2e^3 & 2e - 4e^3 + 3e^2 & -4e^3 + 3e^2 + e \\ e - e^3 & 2e^3 - 2e & -e + 2e^3 \end{pmatrix}.$$

h) Was ist e^{Bt}?

Lösung: Das geht natürlich genauso: Mit den Bezeichnung aus der vorigen Lösung ist $e^{Bt} = Me^{Dt}M^{-1}$, und e^{Dt} ist die Diagonalmatrix mit Einträgen e^t, e^{2t} und e^{3t}. Somit folgt mit zwei Matrixmultiplikationen

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 3e^{3t} & -6e^{3t} + 6e^{2t} & -6e^{3t} + 6e^{2t} \\ -e^{2t} - e^t + 2e^{3t} & 2e^t - 4e^{3t} + 3e^{2t} & -4e^3 + 3e^{2t} + e^t \\ e^t - e^{3t} & 2e^{3t} - 2e^t & -e^t + 2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 5x(t) - 6y(t) - 6z(t), & x(0) &= 0 \\ \dot{y}(t) &= 3x(t) - 4y(t) - 5z(t), & y(0) &= 0 \\ \dot{z}(t) &= -2x(t) + 4y(t) + 5z(z), & z(0) &= 7 \end{aligned}$$

Lösung: Die Matrix dieses Differentialgleichungssystems ist die gerade betrachtete Matrix B; die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$\vec{x}(t) = e^{Bt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42e^{3t} + 42e^{2t} \\ -28e^3 + 21e^{2t} + 7e^t \\ 14e^{3t} - 7e^t \end{pmatrix},$$

das Siebenfache der letzten Spalte von e^{Bt}. Skalar ausgedrückt haben wir somit die Lösungsfunktionen

$$x(t) = -42e^{3t} + 42e^{2t}, \qquad y(t) = -28e^3 + 21e^{2t} + 7e^t \quad \text{und} \quad z(t) = 14e^{3t} - 7e^t.$$

j) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung:

$$\det(C - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + i^2 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Die Eigenwerte sind also 0 und 2.

Das Gleichungssystem $x + iy = 0$ und $-ix + y = 0$ ist äquivalent zu $y = ix$, der Eigenraum zum Eigenwert Null wird also aufgespannt vom Vektor $\binom{1}{i}$. Für $\lambda = 2$ haben wir die Gleichungen $-x + iy = 0$ und $-ix - y = 0$, d.h. hier ist $\binom{1}{-i}$ ein Eigenvektor. (Wir könnten stattdessen natürlich auch $\binom{i}{1}$ nehmen; die beiden Vektoren spannen denselben Unterraum von $\mathbb{C}^2$ auf.)

Finden Sie möglichst viele Nullstellen der folgenden Polynome:

k) $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$

Lösung: Wir versuchen unser Glück mit dem Wurzelsatz von VIÈTE; falls alle Lösungen ganzzahlig sind, sind sie Teiler von 30. In Frage kommen also $\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15$ und ±30. Einsetzen zeigt, daß $1, 5$ und 6 die Nullstellen sind.

l) $x^4 - 8x^3 - 34x^2 + 8x + 33$

Lösung: Hier kommen nur $\pm1, \pm3, \pm11$ und ±33 als Teiler in Frage; die Wurzeln sind $\pm1, -3$ und 11.

m) $x^4 + 17x^3 + 69x^2 - 17x - 70$

Lösung: 70 hat die Primteiler $2, 5$ und 7; die Nullstellen sind $\pm1, -7$ und -10.

n) $x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$

Lösung: Hier stehen nur $\pm, 1, \pm2$ und ±4 zur Auswahl; Nullstellen sind ±2 sowie (dreifach) die Eins.

o) $3x^6 + 6x^5 - 12x^4 - 30x^3 - 3x^2 + 24x + 12$

Lösung: Hier ist der führende Koeffizient nicht eins; falls alle Nullstellen ganzzahlig sind, teilen sie also nicht nur den konstanten Term zwölf, sondern dessen Quotienten bei der Division durch den führenden Term drei, also vier. Die Nullstellen sind ±1 und ±2, wobei -1 die Vielfachheit drei hat.

p) V sei der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens 200. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} V \to V \\ x(t) \mapsto \ddot{x}(t) \end{cases}$!

Lösung: Eigenvektoren sind Polynome, deren zweite Ableitung ein Vielfaches des Polynoms selbst ist. Somit sind alle höchstens linearen Polynome (außer dem Nullpolynom) Eigenvektoren zum Eigenwert null, aber sonst gibt es keine Eigenwerte und Eigenvektoren, denn die zweite Ableitung eines Polynoms (ungleich dem Nullpolynom) hat kleineren Grad als das Polynom selbst.

q) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ x(t) \mapsto \dot{x}(t) \end{cases} \quad !$$

Lösung: Ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung das λ-fache der Funktion selbst ist. Also sind genau die Funktionen $x(t) = Ce^{\lambda t}$ mit $C \neq 0$ Eigenvektoren zu λ. Insbesondere ist hier *jede* reelle Zahl ein Eigenwert.