

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18. Dezember 2003

- a) Eine ebene Welle der Kreisfrequenz ω_0 treffe auf ein eindimensionales Hindernis mit keilförmiger Durchlässigkeit gemäß der Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a} & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Berechnen Sie das (FRAUNHOFER-)Beugungsbild dieses Hindernisses!
- b) Vergleichen Sie mit dem Beugungsbild eines Spalts der Breite a , insbesondere was die Maxima und Minima des Bildes betrifft! Können Sie das Ergebnis einfach erklären?
- c) In der TEM₀₁-Mode schwingt ein Laserstrahl in erster Näherung wie eine ebene Welle, nur daß die Phase in der rechten Hälfte gegenüber der linken Hälfte um π verschoben ist; die Grenze zwischen den beiden Hälften sei bei $x = 0$, und die Kreisfrequenz sei ω_0 . Berechnen Sie das Beugungsbild eines solchen Strahls beim Durchgang durch obigen keilförmigen Spalt!
- d) Berechnen Sie sein Beugungsbild für ein zum Nullpunkt symmetrisches Strichgitter mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2N+1} \delta(x - (\frac{2N+1}{2} - k) d) !$$

- e) Berechnen Sie sein Beugungsbild beim Auftreffen auf den rechteckigen Spalt mit Durchlässigkeitsfunktion $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| < a \text{ und } |y| < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- f) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ des Vordiploms seinen maximalen Wissenstand in Höherer Mathematik erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen HERMANN EBBINGHAUS (1850–1909) die Differentialgleichung $\dot{w}(t) = -\gamma(w(t) - \beta)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!
- g) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1 \text{ Jahr}) = 60\%$. Wieviel hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach einem halben Jahr vergessen?
- h) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von 40 m^3 , dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?
- i) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot{y}(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?
- j) Bestimmen Sie für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = \lambda_2 y_2(t), \quad \dots \quad \dot{y}_n(t) = \lambda_n y_n(t) !$$

- k) Erraten Sie eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = 1 - x(t)$$

und geben Sie dann die allgemeine Lösung dieses Systems an!

- l) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y}(t) + y \cdot \sin t = 0$!
(Hinweis: Was ist $\frac{d}{dt} \ln y(t)$?)