

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11. Dezember 2003

- a) Gegeben sei ein trigonometrisches Polynom $f(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i \omega t}$. Was ist die FOURIER-Transformation von f im Distributionensinn? Können Sie diese durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

Lösung:

$$\begin{aligned} \hat{T}_f(\varphi) &= T_f(\hat{\varphi}) = \sum_{k=-N}^N c_k \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(t) e^{k \cdot i \omega t} dt = \sum_{k=-N}^N c_k \cdot 2\pi \check{\varphi}(k\omega) = 2\pi \sum_{k=-N}^N c_k \varphi(k\omega) \\ &= 2\pi \sum_{k=-N}^N c_k \Delta_{k\omega}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\pi \sum_{k=-N}^N c_k \delta(t - k\omega) \right) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

- b) *ditto* für $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^N \sin \ell\omega t$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^N (\cos k\omega t + \sin k\omega t) = a_0 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2} + \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i} \right) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{1-i}{2} e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^N \frac{1+i}{2} e^{-ik\omega t}. \end{aligned}$$

Damit ist alles zurückgeführt auf die vorige Frage.

- c) *ditto* für $f(t) = t$

Lösung:

$$\begin{aligned} \hat{T}_f(\varphi) &= T_f(\hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \hat{\varphi}(t) dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(t) dt = -2\pi i \check{\varphi}(0) = -2\pi i \dot{\varphi}(0) \\ &= 2\pi i \dot{\Delta}_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i \dot{\delta}(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

- d) Berechnen Sie für $g_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und eine stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) \varphi(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt!$$

Ist $\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt$?

Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) \varphi(t) dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\varphi(t)}{a} dt = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi(t) dt$$

läßt sich nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung auch schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) \varphi(t) dt = \frac{\frac{a}{2} - (-\frac{a}{2})}{a} \varphi(\tau) = \varphi(\tau)$$

für ein geeignetes $\tau \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$; für $a \rightarrow 0$ geht $\tau \rightarrow 0$, also der Wert des Integrals gegen $\varphi(0)$. Genau das ist auch der Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt.$$

e) Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ und $g_a(t)$ wie oben die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) f(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt!$$

$$\text{Ist } \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt?$$

Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) f(t) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} f(t) dt + \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^0 f(t) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} dt - \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^0 dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

unabhängig von a . Damit verschwindet auch der Limes für $a \rightarrow 0$.

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt$ mit einem unstetigen f würden die meisten Mathematiker nicht für sinnvoll halten; Ingenieure haben weniger Hemmungen und schreiben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) = 1,$$

was offensichtlich nicht gleich dem Limes der linken Seite ist. Gelegentlich definiert man das Integral auch als Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Limes von $f(t)$ für $t \rightarrow 0$; mit dieser Interpretation stimmt die Formel.

f) Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [t] \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Ableitung im Distributionensinn! Läßt sie sich durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

Lösung:

$$\begin{aligned}
\dot{T}_f(\varphi) &= -T_f(\dot{\varphi}) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n}^{2n+1} \dot{\varphi}(t) dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi(2n) - \varphi(2n+1)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \varphi(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \Delta_m(\varphi) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta(t-m) \right) \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

g) *ditto* für $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\dot{T}_f(\varphi) &= -T_f(\dot{\varphi}) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\varphi}(t) dt = \varphi(-\pi) - \varphi(\pi) \\
&= \Delta_{-\pi}(\varphi) - \Delta_{\pi}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)) \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

h) Berechnen Sie für dasselbe g die Faltung $f_i * g$ mit folgenden Funktionen:

$$f_1(t) = \sin t, \quad f_2(t) = \sin^2 t, \quad f_3(t) = 5t + 7, \quad f_4(t) = e^t$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
(f_1 * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t-s)g(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-s) ds = \cos(t-\pi) - \cos(t+\pi) = 0 \\
(f_2 * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(t-s)g(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t-s) ds \\
&= \frac{1}{2} (\sin(t-s) \cos(t-s) - (t-s)) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} (-(t-\pi) + (t+\pi)) = \pi \\
(f_3 * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (5(t-s) + 7)g(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} (5(t-s) + 7) ds = 10\pi t + 14\pi \\
(f_4 * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-s}g(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} e^{t-s} ds = e^{t+\pi} - e^{t-\pi} = e^t (e^{\pi} - e^{-\pi})
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Werte hätte man auch ohne Rechnung bekommen: Faltung mit g integriert eine Funktion über das Intervall der Länge 2π mit dem betrachteten Wert als Mittelpunkt. Für den Sinus ist dieses Intervall ein volles Periodenintervall, das Integral also Null. Wird $f_2(t) = \sin^2 t$ über ein Intervall der Länge 2π integriert, hat man zwei volle Perionen; das Integral hat offensichtlich denselben Wert wie das über \cos^2 . Da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ist, ist die Summe der beiden Werte 2π , jeder einzelne also π .

i) Berechnen Sie die Faltungsprodukte $(\delta(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2})) * \sin t$ und $(\delta(t) + \delta(t - \pi)) * \sin t$!

Lösung:

$$(\delta(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2})) * \sin t = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t-s) + \delta(t - \frac{\pi}{2} - s)) \sin s \, ds = \sin t + \sin(t - \frac{\pi}{2}) = \sin t - \cos t$$

$$(\delta(t) + \delta(t - \pi)) * \sin t = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t-s) + \delta(t - \pi - s)) \sin s \, ds = \sin t + \sin(t - \pi) = 0$$

j) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ quadratintegrierbar ist!

Lösung: $f(\omega)$ ist die FOURIER-Transformierte von $g(t) = \begin{cases} 1/2 & \text{falls } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$; da g quadratintegrierbar ist, ist es nach dem Satz von PARSEVAL auch f .

k) Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$?

Lösung: Wieder nach PARSEVAL ist mit obigen Bezeichnungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \|f\|_2^2 = 2\pi \|g\|_2^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 dt = \pi.$$

l) Zeigen Sie, daß die Frequenzabschätzung aus dem Satz von NYQUIST scharf ist!

Lösung: Man betrachte das Beispiel $\sin \Omega t$ mit Abtastung bei den Nullstellen.

m) Berechnen Sie das Faltungsprodukt von $f(x, y) = \sin x \cos y$ mit der zweidimensionalen Distribution $g(x, y) = (\delta(x + \frac{\pi}{2}) + \delta(x - \frac{\pi}{2})) (\delta(y + \frac{\pi}{2}) - \delta(y - \frac{\pi}{2}))$!

Lösung: Da Integration linear ist und jeder der beiden Faktoren von g nur von einer der beiden Integrationsvariablen abhängt, können wir ausmultiplizieren und nacheinander die vier zweidimensionalen Distributionen $\delta(x \pm \frac{\pi}{2}) \cdot \delta(y \pm \frac{\pi}{2})$ mit f falten. Die entsprechenden Faltungsintegrale sind

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-v) \cdot \left(\delta(u \pm \frac{\pi}{2}) \delta(v \pm \frac{\pi}{2}) \right) du dv = f\left(x \pm \frac{\pi}{2}, y \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Wegen $\sin(x \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \cos x$ und $\cos(y \pm \frac{\pi}{2}) = \mp \sin y$ ist $f(x \pm \frac{\pi}{2}, y \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \cos x \sin y$, wobei rechts genau dann ein Pluszeichen steht, wenn links *verschiedene* Vorzeichen stehen. Das Produkt

$$g(x, y) = \delta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \delta\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \delta\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \delta\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \delta\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

führt also insgesamt zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-v) g(u, v) du dv = -\cos x \sin y - \cos x \sin y + \cos x \sin y + \cos x \sin y = 0.$$