WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4. Dezember 2003

a) Die FOURIER-Transformierte von $N_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ ist $g_\sigma(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$. Berechnen Sie für alle $t, \omega \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{\sigma\to 0} N_\sigma(t)$ und $\lim\limits_{\sigma\to 0} g_\sigma(\omega)$!

Lösung: $N_\sigma(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ geht für $\sigma \to 0$ gegen unendlich; für $t \neq 0$ ist $\lim\limits_{\sigma\to 0} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = 0$, also auch $\lim\limits_{\sigma\to 0} N_\sigma(t) = 0$, denn der Exponentialfaktor geht schneller gegen null als $1/\sigma$ gegen unendlich.

Für beliebiges ω ist $\lim\limits_{\sigma\to 0} g_\sigma(\omega) = \lim\limits_{\sigma\to 0} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} = e^0 = 1$.

b) Welche der folgenden Funktionen liegen in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

$$f(t) = t, \qquad g(t) = \frac{1}{t}, \qquad h(t) = \frac{1}{1+t^2}, \qquad j(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}},$$
$$k(t) = e^{-t}, \qquad \ell(t) = e^{-t^2}, \qquad m(t) = e^{-t}\sin t, \qquad n(t) = e^{-|t|}\cos t$$

Lösung: Das Integral über $|f(t)|^2 = t^2$ divergiert an den Grenzen, das über $|g(t)|^2 = 1/t^2$ an der Stelle $t = 0$. Die Integrale für h und j haben jeweils das Integral über $1/(1+t^2)$ als konvergente Majorante, konvergieren also.

Das Integral über $|k(t)|^2 = e^{-2t}$ divergiert an der unteren Grenze; $\ell(t) = e^{-t^2}$ liegt im SCHWARTZ-Raum, also erst recht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$m(t)$ liegt aus dem gleichen Grund wie $k(t)$ nicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, dafür aber $n(t) = e^{-|t|}\cos t$, denn aus der Vorlesung ist bekannt, daß $e^{-|t|} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und die L^2-Norm von $e^{-|t|}$ ist eine konvergente Majorante für die von $n(t)$.

c) Berechnen Sie die L^2-Normen der folgenden Funktionen:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad g(t) = e^{-t^2}, \qquad h(t) = e^{-(1+t)^2}, \qquad j(t) = \frac{1}{1+|t|}$$
$$k(t) = \frac{1}{1+|[t]|}, \qquad \ell(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}} & \text{falls } n - \frac{1}{2n} < t < n + \frac{1}{2n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \,\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$$\|g\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2}\,dt \underset{s=2t}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2}\,\frac{ds}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\|h\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(1+t)^2}\,dt \underset{s=t+1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2s^2}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\|j\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+|t|)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = \left.\frac{-1}{1+t}\right|_0^{\infty} = 1$$

$$\|k\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(1+|[t]|\right)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|n|)^2} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2} = -1+2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}-1$$

$$\|\ell\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-\frac{1}{2n}}^{n+\frac{1}{2n}} \frac{dt}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$

also ist

$$\|f\|_2 = \sqrt{\pi}, \quad \|g\|_2 = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}, \quad \|h\|_2 = \|j\|_2 = 1, \quad \|k\|_2 = \sqrt{\frac{\pi^2}{3}-1} \quad \text{und} \quad \|\ell\|_2\, \frac{\sqrt{6}}{6}\pi\,.$$

d) Welche L^2-Normen haben die FOURIER-Transformierten dieser Funktionen?

Lösung: Allgemein ist nach der PLANCHEREL-Formel $\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$; damit lassen sich alle L^2-Normen der FOURIER-Transformierten leicht berechnen.

e) Berechnen Sie die L^2-Norm der Funktion $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$!

Lösung: $\dfrac{\sin\omega}{\omega}$ ist die FOURIER-Transformierte des Rechteckimpulses

$$R(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } |t| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } \|R\|_2^2 = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{4} = \frac{1}{2}, \text{ also ist } \left\|\widehat{R}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}\,.$$

f) Welche der Funktionen aus *b)* und *c)* sind absolut integrierbar?

Lösung: In *b)* f und g offensichtlich nicht, dafür h als Ableitung des Arcustangens. $|j(t)| = j(t)$ hat $J(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \le 1 \\ \frac{1}{|t|} & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$ als konvergente Majorante, $k(t)$ divergiert an der unteren Grenze, $\ell(t)$ ist als stark abfallende Funktion insbesondere absolut integrierbar, $m(t)$ divergiert an der unteren Grenze und $n(t)$ hat $e^{-|t|}$ als konvergente Majorante.
In *c)* hat $f(t)$ den Areasinus hyperbolicus als Stammfunktion, das Integral divergiert also. g und h sind Glockenkurven, also absolut integrierbar, $j(t)$ ist nicht absolut integrierbar, da die Stammfunktion für $t \ge 0$ gleich $\ln(1+t)$ ist, was für $t \to \infty$ divergiert; $k(t)$ hat $j(t)$ als divergente Minorante, und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ell(t)|\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-\frac{1}{2n}}^{n-\frac{1}{2n}} \frac{dt}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

konvergiert, da $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s > 1$ konvergiert. (Hier für $s = \frac{3}{2}$ liegt der Grenzwert bei etwa 2,612375349.)

g) Welche der folgenden Abbildungen $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ sind Distributionen?

$$T_1(\varphi) = 3\varphi(2) - 2\varphi(3), \qquad T_2(\varphi) = \varphi(2)^3 - \varphi(3)^2, \qquad T_3(\varphi) = 3\ddot{\varphi}(2) - 2\dot{\varphi}(3),$$

$$T_4(\varphi) = e^{\varphi(0)}, \qquad T_5(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt, \qquad T_6(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt,$$

$$T_7(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n!}, \qquad T_8(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(1)^n}{n!}, \qquad T_9(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ddot\varphi(n)}{n!}$$

Lösung: $T_1 = 3\Delta_2 - 2\Delta_3$ ist eine, T_2 ist nicht linear, T_3 ist linear und stetig (wegen des starken Konvergenzbegriffs in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, der auch Ableitungen einschließt, also Distribution, T_4 ist nicht linear, T_5 und T_6 sind Distributionen wegen der Stetigkeit von Integralen als Funktionen eines Parameters, T_7 und T_9 sind Distributionen, weil die Reihen jeweils Exponentialreihen als absolut konvergente Majoranten haben, da im SCHWARTZ-Raum sowohl φ als auch $\ddot\varphi$ beschränkt sind, T_8 ist nicht linear.

h) Zu welchen der folgenden Abbildungen $T_i\colon L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ gibt es Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $T_i = \widetilde{T}_f$?

$$T_1(\varphi) = 3\varphi(2) - 2\varphi(3), \qquad T_2(\varphi) = \varphi(2)^3 - \varphi(3)^2, \qquad T_3(\varphi) = 3\ddot\varphi(2) - 2\dot\varphi(3),$$

$$T_4(\varphi) = e^{\varphi(0)}, \qquad T_5(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt, \qquad T_6(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt,$$

Lösung: Nicht zu T_1 und T_3, weil diese Abbildungen nicht beschränkt sind; nicht zu T_2 und T_4, weil diese Abbildungen nicht linear sind. Für T_5 ist f einfach ein Rechteckimpuls, der genau auf $[0, 1]$ gleich eins ist, für T_6 bietet sich $f \equiv 1$ an, aber das liegt nicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und in der Tat ist T_6 nicht beschränkt.

i) Welche der folgenden Vorschriften definieren Abbildungen $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$?

$$T_7(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n!}, \qquad T_8(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(1)^n}{n!}, \qquad T_9(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ddot\varphi(n)}{n!}$$

Lösung: Nur T_8 mit $T_8(\varphi) = e^{\varphi(1)}$. Die Reihe $T_7(\varphi)$ kann für $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ divergieren, die zweiten Ableitungen sind für allgemeine $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nicht einmal definiert.

j) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Distributionen

$$T_1\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad \varphi \mapsto \frac{1}{2}\big(\varphi(1) + \varphi(-1)\big) \end{cases} \quad \text{und} \quad T_2\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad \varphi \mapsto \frac{1}{2}\big(\varphi(i) + \varphi(-i)\big) \end{cases},$$

und schreiben Sie diese, sofern möglich, in der Form T_f mit Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$!

Lösung:

$$\widehat{T}_1(\varphi) = T_1(\widehat\varphi) = \frac{1}{2}\big(\widehat\varphi(1) + \widehat\varphi(-1)\big) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{it}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-it}\,dt\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\cos t\,dt = T_{\cos}(\varphi)\,.$$

und

$$\widehat{T}_2(\varphi) = T_2(\widehat{\varphi}) = \frac{1}{2}\big(\widehat{\varphi}(i) + \widehat{\varphi}(-i)\big) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{t}\,dt\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\cosh t\,dt = T_{\cosh}(\varphi)\,.$$

Allerdings liegen weder $\cos t$ und $\cosh t$ in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

k) $f(t) \equiv a$ mit $a \in \mathbb{C}$ sei eine konstante Funktion. Was ist $\widehat{T}_f$? Existiert $\widehat{f}(\omega)$?

Lösung: $\widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} a\widehat{\varphi}(\omega)\,d\omega = a\check{\widehat{\varphi}}(1) = a\varphi(1)\,.$

Damit ist $\widehat{T}_f = a\Delta_0$ ein Vielfaches der Dirac-Distribution und $\widehat{f}(\omega) = a\delta(\omega)$.