

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4. Dezember 2003

a) Die FOURIER-Transformierte von $N_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ ist $g_\sigma(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$. Berechnen Sie für alle $t, \omega \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim_{\sigma \rightarrow 0} N_\sigma(t)$ und $\lim_{\sigma \rightarrow 0} g_\sigma(\omega)$!

b) Welche der folgenden Funktionen liegen in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

$$\begin{aligned} f(t) &= t, & g(t) &= \frac{1}{t}, & h(t) &= \frac{1}{1+t^2}, & j(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \\ k(t) &= e^{-t}, & \ell(t) &= e^{-t^2}, & m(t) &= e^{-t} \sin t, & n(t) &= e^{-|t|} \cos t \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie die L^2 -Normen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, & g(t) &= e^{-t^2}, & h(t) &= e^{-(1+t)^2}, & j(t) &= \frac{1}{1+|t|} \\ k(t) &= \frac{1}{1+|t|}, & \ell(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}} & \text{falls } n - \frac{1}{2n} < t < n + \frac{1}{2n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

d) Welche L^2 -Normen haben die FOURIER-Transformierten dieser Funktionen?

e) Berechnen Sie die L^2 -Norm der Funktion $f(t) = \frac{\sin t}{t}$!

f) Welche der Funktionen aus b) und c) sind absolut integrierbar?

g) Welche der folgenden Abbildungen $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ sind Distributionen?

$$\begin{aligned} T_1(\varphi) &= 3\varphi(2) - 2\varphi(3), & T_2(\varphi) &= \varphi(2)^3 - \varphi(3)^2, & T_3(\varphi) &= 3\ddot{\varphi}(2) - 2\dot{\varphi}(3), \\ T_4(\varphi) &= e^{\varphi(0)}, & T_5(\varphi) &= \int_0^1 \varphi(t) dt, & T_6(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt, \\ T_7(\varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k!}, & T_8(\varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(1)^k}{k!}, & T_9(\varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ddot{\varphi}(k)}{k!} \end{aligned}$$

h) Zu welchen der folgenden Abbildungen $T_i: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $T_i = \tilde{T}_f$?

$$\begin{aligned} T_1(\varphi) &= 3\varphi(2) - 2\varphi(3), & T_2(\varphi) &= \varphi(2)^3 - \varphi(3)^2, & T_3(\varphi) &= 3\ddot{\varphi}(2) - 2\dot{\varphi}(3), \\ T_4(\varphi) &= e^{\varphi(0)}, & T_5(\varphi) &= \int_0^1 \varphi(t) dt, & T_6(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

i) Welche der folgenden Vorschriften definieren Abbildungen $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$?

$$T_7(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k!}, \quad T_8(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(1)^k}{k!}, \quad T_9(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ddot{\varphi}(k)}{k!}$$

j) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Distributionen

$$T_1: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(1) + \varphi(-1)) \end{cases} \quad \text{und} \quad T_2: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(i) + \varphi(-i)) \end{cases},$$

und schreiben Sie diese, sofern möglich, in der Form T_f mit Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$!

k) $f(t) \equiv a$ mit $a \in \mathbb{C}$ sei eine konstante Funktion. Was ist \hat{T}_f ? Existiert $\hat{f}(\omega)$?