

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. November 2003

a) *Richtig oder falsch:* Die Funktion  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$  ist stark abfallend.

**Lösung:** *Falsch;* beispielsweise bleibt  $t^3 f(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$  nicht beschränkt für  $t \rightarrow \pm\infty$ .

b) *Richtig oder falsch:* Die Funktion  $f(t) = \frac{1}{\cosh t}$  ist stark abfallend.

**Lösung:** *Richtig:* Zunächst hat jede Ableitung von  $f$  die Form

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(\sinh t, \cosh t)}{\cosh^{n+1} t},$$

wobei  $P(x, y)$  ein Polynom vom Gesamtgrad höchstens  $n$  ist: Für  $n = 0$  ist das klar mit  $P \equiv 1$ , und  $f^{(n+1)}(t)$  ist die Ableitung von  $f^{(n)}(t)$ , also ist nach der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{\cosh^{n+1} t \cdot \frac{d}{dt} P_n(\sinh t, \cosh t) - P_n(\sinh t, \cosh t) \cdot (n+1) \cosh^n t \sinh t}{\cosh^{2n+2} t} \\ &= \frac{\cosh t \cdot \frac{d}{dt} P_n(\sinh t, \cosh t) - P_n(\sinh t, \cosh t) \cdot (n+1) \sinh t}{\cosh^{n+2} t} \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} P_n(\sinh t, \cosh t) = \frac{\partial}{\partial x} P_n(\sinh t, \cosh t) \cosh t + \frac{\partial}{\partial y} P_n(\sinh t, \cosh t) \sinh t$$

hat die Ableitung von  $P_n(\sinh t, \cosh t)$  höchstens denselben Grad wie das Polynom selbst, also hat der Zähler höchstens Grad  $n+1$ , womit die Behauptung induktiv folgt. Insbesondere ist spätestens jetzt klar, daß  $f(t)$  beliebig oft differenzierbar ist.

Wir schreiben den Nenner um als

$$\cosh^{n+1} t = \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n+1} = e^{(n+1)t} \cdot \frac{(1 + e^{-2t})^{n+1}}{2^{n+1}} = e^{(n+1)t} g(t),$$

wobei  $g(t) = (1 + e^{-2t})^{n+1} / 2^{n+1}$  für  $t \rightarrow \infty$  durch positive Schranken nach oben und nach unten beschränkt bleibt. Genauso können wir ihn auch umschreiben als

$$\cosh^{n+1} t = e^{-(n+1)t} \cdot \frac{(1 + e^{2t})^{n+1}}{2^{n+1}} = e^{-(n+1)t} \tilde{g}(t),$$

wobei  $\tilde{g}(t)$  für  $t \rightarrow -\infty$  durch positive Schranken nach oben und nach unten beschränkt bleibt. Den Zähler können wir entsprechend schreiben als

$$P_n(\sinh t, \cosh t) = e^{-nt} h(t) = e^{nt} \tilde{h}(t),$$

wobei  $h(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  und  $\tilde{h}(t)$  für  $t \rightarrow -\infty$  betragsmäßig beschränkt bleibt. Insgesamt ist also

$$f^{(n)}(t) = e^{-t} m(t) = e^t \tilde{m}(t),$$

wobei  $m(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  und  $\tilde{m}(t)$  für  $t \rightarrow -\infty$  betragsmäßig beschränkt bleibt. Damit ist klar, daß auch für jedes  $r \in \mathbb{N}_0$  der Betrag von  $t^r f^{(n)}(t)$  für  $t \rightarrow \pm\infty$  beschränkt bleibt.

c) *Richtig oder falsch:* Die Funktion  $f(t) = e^{-|t|}$  ist stark abfallend.

**Lösung:** *Falsch*, denn sie ist im Nullpunkt nicht differenzierbar.

d) *Richtig oder falsch:* Die Funktion  $f(t) = te^{-t}$  ist stark abfallend.

**Lösung:** *Falsch*, denn sie ist für  $t \rightarrow -\infty$  nicht beschränkt.

e) *Richtig oder falsch:* Die Summe zweier stark abfallender Funktionen ist wieder stark abfallend.

**Lösung:** *Richtig:* Sie ist wieder beliebig oft differenzierbar, und

$$\left| t^r (f+g)^{(k)}(t) \right| = \left| t^r f^{(k)}(t) + t^r g^{(k)}(t) \right| \leq \left| t^r f^{(k)}(t) \right| + \left| t^r g^{(k)}(t) \right|$$

ist beschränkt für alle  $k, r \in \mathbb{N}_0$ .

f) *Richtig oder falsch:* Ist  $f$  stark abfallend, so auch jede Potenz  $f^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lösung:** *Richtig:* Mit der Differenzierbarkeit gibt es keine Probleme, und jede Ableitung von  $f^n(t)$  kann (via Kettenregel oder Produktregel) abgeschätzt werden durch Produkte von Ableitungen von  $f(t)$ .

g) Welche periodischen Funktionen sind stark abfallend?

**Lösung:** *Nur die Nullfunktion.* Falls die Funktion nämlich irgendwo einen von null verschiedenen Wert annimmt, ist  $tf(t)$  für  $t \rightarrow \pm\infty$  nicht mehr beschränkt.

h) *Richtig oder falsch:* Wenn die FOURIER-Transformierte von  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  existiert, ist  $f$  stark abfallend.

**Lösung:** *Falsch;* beispielsweise existiert die FOURIER-Transformierte eines Rechtecksimpulses, der als nicht differenzierbare Funktion auch nicht stark abfallend sein kann.

i) Die FOURIER-transformierbare Funktion  $f$  erfülle die Gleichung

$$\ddot{f}(t) + 4\dot{f}(t) - 3f(t) = g(t)$$

mit einer FOURIER-transformierbaren Funktion  $g$ . Drücken Sie  $\hat{f}(\omega)$  durch  $\hat{g}(\omega)$  aus!

**Lösung:** FOURIER-Transformation macht aus den beiden Seiten der Gleichung

$$-\omega^2 \hat{f}(\omega) + 4i\omega \hat{f}(\omega) - 3\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega) \quad \text{oder} \quad \hat{f}(\omega) = -\frac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2 - 4i\omega + 3}.$$

j) Laut Vorlesung ist  $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ . Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Beziehung jene Stammfunktion  $F(t)$  von  $f(t) = t^n$ , für die  $F(0) = a$  ist!

**Lösung:**  $F(t)$  erfüllt die Gleichung  $\dot{F}(t) = f(t)$  und  $F(0) = a$ ; daher ist

$$\mathcal{L}\{F(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t^n\}(s) + \frac{a}{s} = \frac{n!}{s^{n+2}} + \frac{a}{s} = \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} + \frac{a}{s} = \frac{1}{n+1} \mathcal{L}\{t^{n+1}\}(s) + \mathcal{L}\{a\}(s).$$

Also ist  $F(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} + a$ , was man natürlich auch einfacher ohne LAPLACE-Transformation bekommen hätte.



p) Was ist  $\mathcal{L}\{t^{1999}e^{-2000t}\}(s)$ ?

**Lösung:**  $\mathcal{L}\{t^{1999}e^{-2000t}\}(s) = \mathcal{L}\{t^{1999}\}(s + 2000) = \frac{1999!}{(s + 2000)^{2000}}$

q) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = \sin a, \quad \dot{x}(0) = \cos a$$

via Laplace-Transformation und beweisen Sie so die Additionsformel für  $\sin(x + a)$ !

**Lösung:** Für  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$  ist  $s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + X(s) = 0$ , also

$$X(s) = \frac{s \sin a + \cos a}{s^2 + 1} = \sin a \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \cos a \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \mathcal{L}\{\sin a \cos t + \cos a \sin t\}(s).$$

Da  $\sin(a + t)$  das Anfangswertproblem offensichtlich löst, folgt (modulo der noch nicht gezeigten Umkehrbarkeit der LAPLACE-Transformation)

$$\sin(a + t) = \sin a \cos t + \cos a \sin t.$$

r) Wie kann man auf ähnliche Weise die Additionsformel für den Cosinus herleiten?

**Lösung:**  $\cos(a + t)$  löst das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = \cos a, \quad \dot{x}(0) = -\sin a.$$

s) Lösen Sie das Anfangswertproblem  $\dot{y}(t) = \lambda y(t)$  und  $y(0) = c$  mit Hilfe von LAPLACE-Transformationen!

**Lösung:**  $\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - c = \lambda\mathcal{L}\{y(t)\}$ , also ist

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{c}{s - \lambda} = c\mathcal{L}\{1\}(s - \lambda) = \mathcal{L}\{ce^{\lambda t}\}(s).$$

t) Lösen Sie das Anfangswertproblem  $y^{(4)} - 16y(t) = 0$  mit  $y(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 2$ ,  $\ddot{y}(0) = 3$  und  $y^{(3)}(0) = 0$  mit Hilfe einer Tabelle von LAPLACE-Transformationen!

**Lösung:**  $\mathcal{L}\{y^{(4)}(t)\}(s) = s^4\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^3 - 2s^2 - 3s = 16\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ , also ist

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s}{s^4 - 16}.$$

In der Tabelle auf der Rückseite des Übungsblatts stehen LAPLACE-Transformationen mit Nenner  $s^4 - \omega^4$  und Zähler  $s, s^2, s^3$ ; mit  $\omega = 2$  erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}(\cosh 2t + \cos 2t) + \frac{1}{2}(\sinh 2t + \sin 2t) + \frac{3}{8}(\cosh 2t - \cos 2t) \\ &= \frac{7}{8}\cosh 2t + \frac{1}{8}\cos 2t + \frac{1}{2}\sinh 2t + \frac{1}{2}\sin 2t. \end{aligned}$$

u) Lösen Sie die Differentialgleichung  $y^{(3)}(t) = y(t)$  mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  und  $\ddot{y}(0) = 0$ !

**Lösung:**  $\mathcal{L}\{y^{(3)}(t)\}(s) = s^3\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) \implies \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0 \implies y(t) \equiv 0.$