Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20. November 2003

a) Richtig oder falsch: Für zwei Funktionen $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Lösung: *Richtig,* denn

$$\begin{aligned}\big(f * (g+h)\big)(t) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)\big(g(\tau)+h(\tau)\big)\,d\tau \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = (f*g)(t) + (f*h)(t)\,.\end{aligned}$$

b) Richtig oder falsch: Für eine Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f * \frac{1}{f} = 1$.

Lösung: *Falsch:* Bezeichnet c_k den k-ten komplexen Fourier-Koeffizient von f und d_k den von $\frac{1}{f}$, so müßte sonst $c_k d_k = 0$ sein für alle $k \neq 0$ und $c_0 d_0 = 1$. Bei einem Rechteckimpuls (für den auch $\frac{1}{f}$ wieder eine Rechteckimpuls ist) ist das offensichtlich nicht der Fall. (Auch sonst spricht nicht das geringste dafür, daß so eine Formel gelten könnte.)

c) Richtig oder falsch: Die Funktionenfolge $f_n(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{n}}$ ist gleichmäßig konvergent *1.)* auf dem Intervall $[0, 1]$ *2.)* auf dem Intervall $[1, 2]$.

Lösung: Auf dem Intervall $[0, 1]$ kann das offensichtlich nicht der Fall sein, da die Grenzfunktion bei $t = 0$ nicht stetig ist, eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen aber gegen eine stetige Funktion konvergiert. Auf $[1, 2]$ dagegen gibt es keine Probleme: Dort ist die Grenzfunktion überall gleich $\frac{1}{t}$, und

$$\left|f_n(t) - \frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{t(t+\frac{1}{n})} = \frac{1}{nt^2+t} \le \frac{1}{n+1}$$

ist kleiner als ε für $n > \frac{1}{\varepsilon}$ und *alle* $t \in [1, 2]$; die Konvergenz ist also gleichmäßig.

d) Richtig oder falsch: Die Fourier-Reihe von $f(t) = \tan t$ konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lösung: Der Tangens ist keine stückweise stetige Funktion im Sinne der Vorlesung, da an den Sprungstellen weder ein links- noch ein rechtsseitiger Grenzwert existiert. Somit kann man nicht aus den Sätzen der Vorlesung auf Konvergenz schließen. Wenn die Reihe konvergent wäre, wäre nach Parseval die Summe der Betragsquadrate der komplexen Fourier-Koeffizienten gleich $\int_0^\pi \tan^2 t\,dt$, aber dieses Integral divergiert, da schon $\int_0^{\pi/2} \tan t\,dt$ divergiert und in der Umgebung der Singularität eine Minorante des Integrals über $\tan^2 t$ ist.

In der Tat kann man zeigen, daß die Fourier-Reihe des Tangens gleich

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1}\pi \sin 2\ell t$$

ist, was offensichtlich nicht konvergiert.

e) Richtig oder falsch: Die FOURIER-Reihe von $f(t) = |t|$ für $|t| < \pi$ und $f(\pi) = 0$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π, zeigt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen.

Lösung: *Falsch,* denn auch an den Unstetigkeitsstellen ist der linksseite Grenzwert gleich dem rechtsseitigen, nämlich π.

f) Richtig oder falsch: Die FOURIER-Reihe von $f(t) = |t|$ für $0 \le t < 2\pi$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π, zeigt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen.

Lösung: *Richtig,* denn jetzt gibt es einen echten Sprung der Höhe 2π.

g) f sei periodisch mit Periode 2π, und für $-\pi \le t < \pi$ sei $f(t) = t$. Wohin konvergiert die FOURIER-Reihe von f für $t = \pi$?

Lösung: Gegen den Mittelwert aus linksseitigem Grenzwert π und rechtsseitigem Grenzwert $-\pi$, also Null.

h) Die Kippschwingung $f(t)$ sei periodisch mit Periode 10, und für $0 \le t < 10$ sei $f(t) = e^{-t}$. Wohin konvergiert die FOURIER-Reihe von f für $t = 0$?

Lösung: Gegen den Mittelwert aus linksseitigem Grenzwert e^{-10} und rechtsseitigem Grenzwert Eins, also $\frac{1+e^{-10}}{2}$.

i) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = |\sin t|$ ist linear unabhängig von den Funktionen $1, \cos kt, \sin \ell t$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Lösung: *Richtig,* denn sonst wäre sie ein trigonometrisches Polynom. Wie wir gesehen haben, treten in ihrer FOURIER-Reihe aber unendlich viele nichtverschwindende Koeffizienten auf. (Andere Begründung: Trigonometrische Polynome sind stetig differenzierbar, f aber nicht.)

j) Richtig oder falsch: Die Funktionen $1, \cos kt, \sin \ell t$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem für $L_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Lösung: *Falsch,* denn wie wir aus der Vorlesung wissen, ist

$$(\cos k\ell,\ \cos k\ell) = (\sin \ell t,\ \sin \ell t) = \frac{1}{2} \neq 1\,.$$

k) Richtig oder falsch: Ist $f(t)$ eine gerade Funktion, so auch $\widehat{f}(\omega)$.

Lösung: *Richtig,* denn mit der Substitution $s = -t$ und $dt = -ds$ ist

$$\widehat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = -\int_{\infty}^{-\infty} f(-s)e^{-i\omega s}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}\,ds = \widehat{f}(\omega)\,.$$

l) Richtig oder falsch: Ist $f(t)$ eine ungerade Funktion, so auch $\widehat{f}(\omega)$.

Lösung: *Richtig,* denn mit der Substitution $s = -t$ und $dt = -ds$ ist

$$\widehat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = -\int_{\infty}^{-\infty} f(-s)e^{-i\omega s}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} -f(s)e^{-i\omega s}\,ds = -\widehat{f}(\omega)\,.$$

m) Richtig oder falsch: Ist $f(t)$ eine gerade Funktion, so auch $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

Lösung: *Falsch,* denn da $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ nur von den Funktionswerten $f(t)$ mit $t \geq 0$ abhängt, haben

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \geq 0 \\ f(-t) & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \geq 0 \\ -f(-t) & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

dieselbe LAPLACE-Transformierte, aber die eine ist gerade, die andere ungerade. Explizites Gegenbeispiel: $\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$ ist ungerade.

n) Richtig oder falsch: Ist $f(t)$ eine ungerade Funktion, so auch $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Lösung: *Falsch* aus demselben Grund. Explizites Gegenbeispiel hier: $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ ist gerade.

o) Berechnen Sie die FOURIER- und die LAPLACE-Transformierte von $f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

Lösung: LAPLACE-Transformierte:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt = \int_0^1 (1-t) e^{-st}\, dt\,.$$

Partielle Integration führt auf

$$\int (1-t)e^{-st}\, dt = -\frac{1-t}{s} e^{-st} - \int \frac{-e^{-st}}{-s}\, dt = \frac{t-1}{s} e^{-st} + \frac{e^{-st}}{s^2}\,,$$

d.h.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}-1}{s^2} = \frac{e^{-s}+s-1}{s^2}\,.$$

FOURIER-Transformierte:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^1 (1-t) e^{-i\omega t}\, dt + \int_{-1}^0 (1+t) e^{-i\omega t}\, dt\,.$$

Die obige partielle Integration führt für $s = i\omega$ auf

$$\int (1-t) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{t-1}{i\omega} e^{-i\omega t} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}$$

und ganz entsprechend erhalten wir

$$\int (1+t) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{-t-1}{i\omega} e^{-i\omega t} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}\,.$$

Auswertung des ersten Integrals an den Stellen 1 und 0 sowie des zweiten an den Stellen 0 und -1 führt auf

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} + \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} = \frac{2(\cos\omega - 1)}{\omega^2}\,.$$

p) Berechnen Sie die FOURIER- und die LAPLACE-Transformierte von $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für } |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

Lösung: Hier kann man entweder mit zweimaliger partieller Integration arbeiten oder mit den EULERschen Formeln. Nach letzteren ist

$$\sin t \cdot e^{-st} = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})e^{-st} = \frac{1}{2i}(e^{(i-s)t} - e^{-(i+s)t}),$$

eine Stammfunktion dazu ist also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(i-s)t}}{i-s} + \frac{e^{-(i+s)t}}{i+s}\right) &= \frac{1}{2i}\frac{i\big(e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t}\big) + s\big(e^{(i-s)t} - e^{-(i+s)t}\big)}{-1-s^2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{e^{-st}\big((e^{it} + e^{-it}}{s^2+1)} - \frac{1}{2i}\frac{e^{-st}(e^{it} - e^{-it})}{s^2+1} \\ &= -\frac{e^{-st}}{s^2+1}\big(\cos t + i \sin t\big)\end{aligned}$$

Für die FOURIER-Transformierte arbeiten wir mit $s = i\omega$, also ist wegen $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t\, e^{-i\omega t}\,dt = \frac{-i\omega}{1-\omega^2}\big(e^{-i\omega\pi/2} + e^{i\omega\pi/2}\big) = \frac{2i\omega\cos\frac{\pi\omega}{2}}{\omega^2-1}\,.$$

Für die LAPLACE-Transformierte folgt entsprechend

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin t\, e^{-st}\,dt = \frac{1 - se^{-\pi s/2}}{1+s^2}\,.$$

q) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine reellwertige Funktion, deren FOURIER-Transformierte $\widehat{f}(\omega)$ existiere. Drücken Sie Real- und Imaginärteil von $\widehat{f}(\omega)$ durch reelle Integrale aus!

Lösung:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\cos\omega t - i\sin\omega t\big)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\end{aligned}$$

r) Welches dieser Integrale verschwindet für gerade *bzw.* ungerade Funktionen f ?

Lösung: Der Realteil verschwindet für ungerades f, der Imaginärteil für gerades.

s) Was ist $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$?

Lösung: $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t}e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{(\lambda-s)t}\,dt = \frac{1}{\lambda-s}e^{(\lambda-s)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\lambda}$

t) Gilt dies auch für komplexe λ ?

Lösung: Natürlich; wie wir zu Beginn des Semesters gesehen haben, gelten (nicht nur) für Exponentialfunktionen im Reellen wie im Komplexen dieselben Integrationsregeln.

u) Berechnen Sie $\mathcal{L}\{\sinh at\}(s)$ und $\mathcal{L}\{\cosh at\}(s)$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh at\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh at\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}\end{aligned}$$

v) Interpretieren Sie die Ergebnisse für $a = i\omega$!

Lösung: Wegen $\sinh i\omega = i\sin\omega$ und $\cosh i\omega = \cos\omega$ führt das auf die bekannten LAPLACE-Transformierten von Sinus und Cosinus.

w) Berechnen Sie $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [t] \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } [t] \text{ ungerade} \end{cases}$! Stellen Sie das Ergebnis nicht als unendliche Summe dar, sondern als geschlossenen Ausdruck!

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} f(t-k)e^{-s(t-k)}e^{-sk}\,dt\\ &= \sum_{k=0}^\infty e^{-sk}\int_0^1 f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = \sum_{\ell=0}^\infty e^{-2s\ell}\int_0^1 e^{-s\tau}\,d\tau = \left(\sum_{\ell=0}^\infty e^{-2s\ell}\right)\int_0^1 e^{-s\tau}\,d\tau\\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\,\frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{1+e^s}{s}\,.\end{aligned}$$

x) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte von $f(t) = t - [t]$ und stellen Sie auch hier das Ergebnis in geschlossener Form dar!

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} f(t-k)e^{-s(t-k)}e^{-sk}\,dt\\ &= \sum_{k=0}^\infty e^{-sk}\int_0^1 f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = \sum_{k=0}^\infty e^{-sk}\int_0^1 \tau e^{-s\tau}\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Die bereits mehrfach durchgeführte partielle Integration zeigt, daß

$$\int te^{-st} = -\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2} + C$$

ist. d.h.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \left(\sum_{k=0}^\infty e^{-sk}\right)\cdot\frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2} = \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})} = \frac{e^s-(1+s)}{s^2(e^s-1)}\,.$$