

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13. November 2003

Falls Sie noch Probleme mit der Berechnung von FOURIER-Reihen haben, sind die entsprechenden Beispiele der letzten Woche wichtiger als die meisten der folgenden Themen:

- a) Berechnen Sie die komplexe FOURIER-Reihe der Funktion $f(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega t}}$ für $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$!

Lösung: Das ist offensichtlich eine geometrische Reihe: $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{k \cdot i\omega t}}{2^k}$.

- b) Schließen Sie daraus auf die reelle FOURIER-Reihe der Funktion

$$f(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega t}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega t}} \text{ für } \omega \in \mathbb{R}_{>0} !$$

Lösung: Der zweite Summand ist ganz entsprechend $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k \cdot i\omega t}}{2^k}$, insgesamt haben wir also (da der Term mit $k = 0$ zweimal vorkommt)

$$f(t) = 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-k \cdot i\omega t}}{2^k} = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{k \cdot i\omega t}}{2^k} + \frac{e^{-k \cdot i\omega t}}{2^k} \right) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{2^{k-1}}.$$

- c) Werten Sie die FOURIER-Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$ aus an der Stelle $t = \frac{T}{4}$ und berechnen Sie den numerischen Wert der entstehenden Summe!

Lösung: Für $t = \frac{T}{4}$ ist $\omega t = \frac{\pi}{2}$, also ist

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega \frac{T}{4}}{\ell \omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\ell \pi}{2}}{\ell \omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\omega},$$

denn für gerade Werte von ℓ ist $\frac{\ell \pi}{2}$ ein ganzzahliges Vielfaches von π , so daß der Sinus verschwindet, und für ungerades $\ell = 2k + 1$ ist $\sin \frac{\ell \pi}{2} = (-1)^k$.

Um den numerischen Wert zu berechnen nützen wir aus, daß die FOURIER-Reihe des Sägezahns überall gegen die Funktion konvergiert; speziell für $t = \frac{T}{4}$ hat diese den Wert

$$\frac{T}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{4} = \frac{T}{8}, \text{ also ist } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\omega} = \frac{T}{8}.$$

Multiplikation mit ω liefert das Ergebnis $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\omega T}{8} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

- d) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit FOURIER-Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell t}{\sqrt{\ell}}$?

Lösung: Für eine solche Funktion wäre $\sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell}^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell}$ die Summe der harmonischen Reihe, also divergent, was nach der BESSELSchen Ungleichung bei der FOURIER-Reihe einer stückweise stetigen periodischen Funktion nicht sein kann.

(Zur Erinnerung: Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, denn

$$S_r = \sum_{k=2^{r+1}}^{2^r+1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^{r+1}}^{2^r+1} \frac{1}{2^{r+1}} = \frac{2^r}{2^{r+1}} = \frac{1}{2}, \quad \text{so daß} \quad \sum_{k=1}^{2^N} \frac{1}{k} = \sum_{r=0}^{N-1} S_r \geq \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{2} = \frac{N}{2}.)$$

e) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit FOURIER-Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{\sqrt{2k+1}}$?

Lösung: Hier wäre entsprechend $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} i a_k^2 = \frac{1}{2k+1}$, was ebenfalls divergiert, denn $2k+1 \leq 3k$ und

$$\frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{3k} \quad \text{d.h.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

kann durch eine harmonische Reihe nach unten abgeschätzt werden.

f) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2}$ konvergiert, und finden Sie eine obere Schranke

für ihren Grenzwert! (Hinweis: Die Reihe $S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} e^{ikt}$ ist aus der Vorlesung bekannt als FOURIER-Reihe eines periodisch fortgesetzten Sinus hyperbolicus.)

Lösung: Tatsächlich ging es in der Vorlesung um jene Funktion $f(t)$, die zwischen $-\pi$ und π mit $\sinh t$ übereinstimmt und ansonsten Periode 2π hat. In der FOURIER-Reihe ist

$$c_k = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} \quad \text{und} \quad |c_k|^2 = \frac{\sinh^2 \pi}{\pi^2} \frac{k^2}{k^2+1}.$$

Nach der BESSELSchen Ungleichung ist daher

$$\frac{\sinh^2 \pi}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} \leq (f, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 t \, dt.$$

Das rechtsstehende Integral ist gleich

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} - \frac{1}{2} \right) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cosh 2t - 1) dt = \left(\frac{\sinh 2t}{4} - \frac{t}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\sinh 2\pi}{2} - \pi, \end{aligned}$$

also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} \leq \frac{\pi^2}{\sinh^2 \pi} \cdot \left(\frac{\sinh \pi}{2} - \pi \right)$.

g) Finden Sie obere Schranken für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$!

Lösung: Für die erste Summe sind Rechteckschwingungen ein guter Ansatz: Für

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad \text{mit } f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

ist $S_f(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)}$, speziell für $h = \frac{\pi}{4}$ also

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } \ell \\ \frac{1}{\ell} & \text{für ungerade } \ell \end{cases} \quad \text{und} \quad c_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } \ell \\ \frac{\pm i}{2\ell} & \text{für ungerade } \ell \end{cases}.$$

Damit ist $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ nach der BESSELSchen Ungleichung kleiner oder gleich

$$(f, f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T h^2 dt = h^2 = \frac{\pi^2}{16},$$

also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \leq \frac{\pi^2}{8}$.

Für die zweite Summe betrachten wir Sägezählimpulse mit Periode 2π ; für diese ist $\omega = 1$, so daß die FOURIER-Reihe laut Vorlesung $S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell t}{\ell}$ ist. Diesmal ist $|c_k| = 1/2k$ für alle $k \neq 0$ und $c_0 = 0$, also

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq (f, f).$$

Hier ist

$$\begin{aligned} (f, f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{t-\pi}{2}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u^2}{4} du = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi^3}{12}\right) = \frac{\pi^2}{12}, \end{aligned}$$

also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$.

(Tatsächlich gilt nach dem Satz von PARSEVAL in beiden Abschätzungen das Gleichheitszeichen.)

h) Die Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien periodisch mit Periode eins, und für $0 \leq t < 1$ sei $f(t) = t$ und $g(t) = t^2$. Was ist $f * g$?

Lösung: Da wir wissen, daß $f * g$ wieder periodisch mit Periode eins ist, genügt es, $f * g(t)$ für $0 \leq t < 1$ zu berechnen. Auch hier schon müssen wir das Integral aufspalten, um einen geschlossenen Ausdruck für den Integranden zu bekommen, etwa als

$$f * g(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^1 f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau + \int_t^1 f(t-\tau)g(\tau) d\tau.$$

Für das Intervall $0 \leq \tau < t$ ist $t-\tau$ mindestens Null und höchstens gleich t ; ist also $0 \leq t-\tau < 1$, so liegt $t-\tau$ im Intervall $[0, 1)$, so daß $f(t-\tau) = t-\tau$ ist.

Für das Intervall $t < \tau \leq 1$ ist $t - \tau$ negativ, kann aber für t aus dem Einheitsintervall nicht kleiner werden als -1 . Somit ist dort $f(t - \tau) = t - \tau + 1$, also insgesamt

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \int_0^t (t - \tau)\tau^2 d\tau + \int_t^1 (t - \tau + 1)\tau^2 d\tau = \int_0^1 (t - \tau)\tau^2 d\tau + \int_t^1 \tau^2 d\tau \\ &= \left(\frac{t\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \frac{\tau^3}{3} \Big|_t^1 = \frac{t}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{t^3}{3} = \frac{t - t^3}{3} + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

im Einheitsintervall, periodisch fortgesetzt auf \mathbb{R} mit Periode eins.

Man beachte, daß $f * g$ eine stetige Funktion ist, denn $t - t^3$ verschwindet bei $t = 0$ und bei $t = 1$.

- i) Die Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien periodisch mit Periode eins, und für $-\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2}$ sei $f(t) = t$ und $g(t) = t^2$. Was ist $f * g$?

Lösung: Hier gehen wir im wesentlichen genauso vor, allerdings bietet sich an, nun alle Integrale über eine Periode von $-\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{2}$ zu berechnen, da wir dann zumindest g einfach einsetzen können. Wir betrachten also nur Werte von t aus dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Allgemein ist

$$-\frac{1}{2} \leq t - \tau \Leftrightarrow \tau - t \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau \leq t + \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad t - \tau < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau - t > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau > t - \frac{1}{2}.$$

Für $t \geq 0$ ist die erste Bedingung überall im Integrationsintervall erfüllt, die zweite allerdings nur für $\tau > t - \frac{1}{2}$; für kleinere τ liegt $t - \tau$ im Intervall zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$, d.h. $f(t - \tau) = t - \tau - 1$. Somit ist für $0 \leq t < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{t - \frac{1}{2}} f(t - \tau)g(\tau) d\tau + \int_{t - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{t - \frac{1}{2}} (t - \tau - 1)\tau^2 d\tau + \int_{t - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (t - \tau)\tau^2 d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (t - \tau)\tau^2 d\tau - \int_{-\frac{1}{2}}^{t - \frac{1}{2}} \tau^2 d\tau \\ &= \left(\frac{t\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{\tau^3}{3} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{t - \frac{1}{2}} = \frac{t}{12} - \frac{(t - \frac{1}{2})^3}{3} - \frac{1}{24} = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{6}. \end{aligned}$$

Für negative t dagegen ist stets $\tau \geq t - \frac{1}{2}$, aber $\tau \leq t + \frac{1}{2}$ ist nicht immer erfüllt. In diesem Fall liegt $t - \tau$ im Intervall zwischen $-\frac{3}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, d.h. $f(t - \tau) = t - \tau + 1$. Somit ist für $-\frac{1}{2} \leq t < 0$

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{t + \frac{1}{2}} f(t - \tau)g(\tau) d\tau + \int_{t + \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{t + \frac{1}{2}} (t - \tau + 1)\tau^2 d\tau + \int_{t + \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (t - \tau)\tau^2 d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (t - \tau)\tau^2 d\tau + \int_{t + \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tau^2 d\tau \\ &= \left(\frac{t\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{\tau^3}{3} \Big|_{t + \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{t}{12} + \frac{1}{24} - \frac{(t + \frac{1}{2})^3}{3} = -\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{6}. \end{aligned}$$

Für beliebige reelle Zahlen wird die Funktion wieder durch periodische Fortsetzung berechnet. Man beachte, daß auch hier $f * g$ eine stetige Funktion ist.

j) Zeigen Sie:
$$\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \sin \ell \omega t \right) * \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} p_{\ell} \sin \ell \omega t \right) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k p_k \cos k \omega t !$$

Lösung: Über die EULERSche Formel $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ lassen sich leicht die komplexen FOURIER-Koeffizienten c_k von $\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \sin \ell \omega t \right)$ und d_k von $\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} p_{\ell} \sin \ell \omega t \right)$ berechnen:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2i} b_k & \text{für } k > 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \\ -\frac{1}{2i} b_{-k} & \text{für } k < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad d_k = \begin{cases} \frac{1}{2i} p_k & \text{für } k > 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \\ -\frac{1}{2i} p_{-k} & \text{für } k < 0 \end{cases} .$$

Die komplexen FOURIER-Koeffizienten der Faltung sind die Produkte $c_k d_k$, also $-\frac{1}{4} b_k p_k$ für $k \neq 0$ und Null für $k = 0$. Der Term mit Index k der komplexen FOURIER-Reihe und der mit Index $-k$ ergänzen sich daher zu $-\frac{1}{2} b_k p_k \cos k \omega t$, wie behauptet.

k) Was ist
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \omega t \right) * \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k \omega t \right) ?$$

Lösung: Wir gehen genauso vor wie oben; der einzige Unterschied ist, daß nun die komplexen FOURIER-Koeffizienten c_k unabhängig vom Vorzeichen gleich $\frac{1}{2} a_{|k|}$ sind, entsprechend auch d_k . Also ist hier $c_k d_k = \frac{1}{4} a_k q_k$ für $k \neq 0$, wir erhalten somit bis aufs Vorzeichen dasselbe Ergebnis wie oben:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \omega t \right) * \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k \omega t \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k \cos k \omega t .$$