

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 30. Oktober 2003

Berechnen Sie für $\gamma: \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto 5 \cos t + 2i \sin t \end{cases}$ die folgenden Integrale:

a) $\int_{\gamma} \frac{z dz}{z^2 + 1}$ b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 9}$ c) $\int_{\gamma} \tan \frac{z}{2} dz$ d) $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sin z}$ e) $\int_{\gamma} \frac{z dz}{\sin z}$

Lösung: Der Integrationsweg γ ist eine Ellipse mit reeller Halbachse fünf und imaginärer Halbachse zwei. Alle Integrale können nach dem Residuensatz berechnet werden:

Der Integrand in a) hat Pole erster Ordnung bei $\pm i$; die Residuen dort sind

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z}{z + i} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{z}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z}{z - i} = \frac{1}{2};$$

damit ist $\int_{\gamma} \frac{z dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2\pi i.$

Der Integrand in b) hat seine Pole bei $\pm 3i$, also nicht in der Ellipse. Somit verschwindet das Integral nach dem CAUCHYSCHEN Integralsatz.

Der Tangens hat Polstellen bei den Nullstellen des Cosinus, den echt halbzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ also. Damit hat der Integrand von c) seine Pole im Ellipseninnern bei $\pm \pi$. Für jede Nullstelle a des Tangens ist, wie wir in der Vorlesung gesehen haben,

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a) \tan z = -1, \quad \text{also auch} \quad \lim_{z \rightarrow 2a} \left(\frac{z}{2} - a \right) \tan \frac{z}{2} = -1.$$

Multiplikation der letzten Gleichung mit zwei führt zu $\lim_{z \rightarrow 2a} (z - 2a) \tan \frac{z}{2} = -2$, beide

Residuen sind also gleich -2 und $\int_{\gamma} \tan \frac{z}{2} dz = 2\pi i(-2 - 2) = -8\pi i.$

Der Nenner der Integranden von d) und e) verschwindet bei allen ganzzahligen Vielfachen von π , innerhalb der Ellipse also bei Null und bei $\pm \pi$. Auf Grund der altbekannten Formel $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ ist $\frac{z}{\sin z}$ bei $z = 0$ holomorph mit Funktionswert eins, während $\frac{1}{\sin z}$ dort Residuum eins hat. Zur Berechnung der Residuen bei $\pm \pi$ nutzen wir aus, daß $\sin(z \pm \pi) = -\sin z$ ist; damit folgt

$$\lim_{z \rightarrow \pm \pi} \frac{z \mp \pi}{\sin z} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{\sin(w \pm \pi)} = - \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{\sin w} = -1.$$

Das Residuum von $\frac{1}{\sin z}$ dort ist also -1 . Für das Residuum von $\frac{z}{\sin z}$ müssen wir diesen Wert noch mit π bzw. $-\pi$ multiplizieren, erhalten also die Residuen $\mp \pi$. Somit ist

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sin z} = 2\pi i(1 - 1 - 1) = -2\pi i \quad \text{und} \quad \int_{\gamma} \frac{z dz}{\sin z} = 2\pi i(\pi - \pi) = 0.$$

b) Was ändert sich, wenn man stattdessen den Integrationsweg $\delta: \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto 5 \cos t - 2i \sin t \end{cases}$ betrachtet?

Lösung: Da sich nur das Vorzeichen des Imaginärteils ändert, ist dies derselbe Integrationsweg in Gegenrichtung durchlaufen. Daher ändern alle Integrale ihr Vorzeichen.

g) Berechnen Sie die LAURENT-Reihe von $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$ um den Punkt $z = 0$!

Lösung: Wir kennen die TAYLOR-Reihe

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \dots;$$

Division durch z^5 führt zur LAURENT-Reihe

$$\frac{\sin z}{z^5} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k-4}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120} - \frac{z^2}{5040} + \dots.$$

h) Berechnen Sie die LAURENT-Reihe von $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ um den Punkt $z = i$!

Lösung: Um die doch recht umständlich anzuwendende Quotientenregel zu vermeiden, schreiben wir den Integranden als

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{\alpha}{z + i} + \frac{\beta}{z - i} = \frac{(\alpha + \beta)z + (\beta - \alpha)i}{z^2 + 1},$$

d.h. $\alpha = -\beta$ und $(\beta - \alpha)i = 2\beta i = 1$, so daß

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z + i} - \frac{i}{2} \frac{1}{z - i}$$

ist. Die LAURENT-Reihe um $z = i$ ist eine Potenzreihe in $(z - i)$; der Term $\frac{1}{z - i}$ kann also so stehen bleiben. Den anderen Summanden schreiben wir nach der Summenformel der geometrischen Reihe als

$$\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z + i} = \frac{-1}{2i} \cdot \frac{1}{(z - i) + 2i} = \frac{-1}{2i(z - i) - 4} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{i}{2}(z - i)} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k (z - i)^k$$

und erhalten als Ergebnis

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 + 1} &= \frac{i}{2} \frac{1}{z - i} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k (z - i)^k \\ &= \frac{i}{2} \frac{1}{z - i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z - i) - \frac{1}{16}(z - i)^2 - \frac{i}{32}(z - i)^3 + \frac{1}{64}(z - i)^4 + \dots \end{aligned}$$

i) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei eine ungerade holomorphe Funktion. Was ist $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{13}} dz$?

Lösung: Da f eine ungerade Funktion ist, enthält seine TAYLOR-Reihe nur ungerade z -Potenzen. Die LAURENT-Reihe von $\frac{f(z)}{z^{13}}$ entsteht daraus durch Division durch z^{13} , enthält also nur *gerade* Potenzen. Insbesondere gibt es keinen Term mit z^{-1} , das Residuum von $\frac{f(z)}{z^{13}}$ bei Null ist also Null, und weitere Pole gibt es nicht wegen der Holomorphie von f . Daher verschwindet das Integral.

j) Was ist $\text{Res}_{-1} \frac{z+2}{(z+1)^2}$?

Lösung: $\frac{z+2}{(z+1)^2} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{z+1}{(z+1)^2} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1}$, und das ist bereits die gesamte LAURENT-Reihe um $z = -1$. Also ist das Residuum gleich eins.

k) Was ist $\text{Res}_0 \frac{\cos z}{z^2}$?

Lösung: Null, denn genau wie die TAYLOR-Reihe des Cosinus enthält die LAURENT-Reihe von $\frac{\cos z}{z^2}$ um $z = 0$ nur gerade Potenzen.

l) Was ist $\int_{\gamma} \frac{z+2}{(z+1)^2} dz$ für obigen Integrationsweg γ ?

Lösung: $2\pi i$ nach dem Residuensatz.

m) Zeigen Sie: Für ein Polynom f und einen geschlossenen, im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Integrationsweg, der ein Gebiet G berandet und auf dem keine Nullstelle von f liegt, ist $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ gleich der Anzahl der (mit Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von f in G .

Lösung: Kandidaten für Polstellen des Integranden sind die Nullstellen von f . Ist $z = z_0$ eine e -fache Nullstelle, so läßt sich $f'(z)/f(z)$ schreiben als $(z-z_0)^e g(z)$ mit einem Polynom g , das bei $z = z_0$ nicht verschwindet. Dann ist

$$f'(z) = (z - z_0)^e g'(z) + e(z - z_0)^{e-1} g(z)$$

und

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^e g'(z) + e(z - z_0)^{e-1} g(z)}{(z - z_0)^e g(z)} = g'(z) + \frac{e}{z - z_0}.$$

$g'(z)$ ist ein Polynom, also in ganz \mathbb{C} holomorph; somit hat $f'(z)/f(z)$ bei jeder Nullstelle von f deren Vielfachheit als Residuum. Damit folgt die Behauptung aus dem Residuensatz.

n) Welchen Hauptteil hat die Funktion $\frac{\cos z}{z^4}$ bei $z = 0$?

Lösung: Wegen $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \dots$ ist $\frac{\cos z}{z^4} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24} - \frac{z^2}{720} + \dots$, der Hauptteil ist also $\frac{1}{z^4} - \frac{1}{2z^2}$.

o) Berechnen Sie die Hauptteile der Funktion $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2}$ für $z = \pm ia$!

Lösung: Auch hier empfiehlt sich eine Partialbruchzerlegung, wobei der Rechenaufwand wahrscheinlich geringer ist, wenn man das Quadrat im Nenner zunächst ignoriert:

$$\frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{\alpha}{z - ia} + \frac{\beta}{z + ia} = \frac{(\alpha + \beta)z + (\alpha - \beta)ia}{z^2 + a^2}$$

zeigt, daß $\beta = -\alpha$ und $(\alpha - \beta)ia = 2\alpha a \cdot i = 1$ ist, also

$$\frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{2ai} \left(\frac{1}{z - ia} - \frac{1}{z + ia} \right)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2 + a^2)^2} &= \frac{-1}{4a^2} \left(\frac{1}{(z - ia)^2} - \frac{2}{z^2 + a^2} + \frac{1}{(z + ia)^2} \right) \\ &= \frac{-1}{4a^2} \left(\frac{1}{(z - ia)^2} + \frac{1}{(z + ia)^2} \right) + \frac{2}{4a^2 \cdot 2ai} \left(\frac{1}{z - ia} - \frac{1}{z + ia} \right).\end{aligned}$$

Da die Terme $\frac{1}{(z + ia)^2}$ und $\frac{1}{z + ia}$ bei $z = ia$ holomorph sind, lassen sie sich dort in eine TAYLOR-Reihe entwickeln, tragen also nichts zum Hauptteil bei. Somit ist der Hauptteil bei $z = ia$

$$\frac{-1}{4a^2} \frac{1}{(z - ia)^2} - \frac{i}{4a^3} \frac{1}{z - ia},$$

und der bei $z = -ia$ entsprechend $\frac{-1}{4a^2} \frac{1}{(z + ia)^2} + \frac{i}{4a^3} \frac{1}{z + ia}$.

p) a sei eine positive reelle Zahl. Was ist $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2}$, wenn γ den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um Null mit Radius $R_1 = a/2$ bzw $R_2 = 2a$ bezeichnet?

Lösung: Da der Integrand nur bei $\pm ia$ Polstellen hat, verschwindet das Integral nach über den Kreis mit Radius $a/2$ nach dem CAUCHYSchen Integralsatz. Das über den Kreis mit Radius $2a$ enthält beide Polstellen, ist also gleich $2\pi i$ mal der Summe der zugehörigen Residuen, die nach der vorigen Aufgabe $\pm \frac{i}{4a^3}$ sind, sich also aufheben. Somit verschwindet auch dieses Integral.

q) Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$?

Lösung: Wir integrieren wie bei den entsprechenden Beispielen in der Vorlesung für eine reelle Zahl $R > a$ zunächst von $-R$ nach R und dann entlang des Halbkreises durch die obere Halbebene mit Radius R zurück nach $-R$. Der Halbkreis enthält nur die Polstelle bei ia , nach dem Residuensatz ist das Integral also $2\pi i \cdot \frac{-i}{4a^3} = \frac{\pi}{2a^3}$.

Auf dem Halbkreisbogen ist $|z^2 + a^2|^2$ größer als R^4 , der Betrag des Integranden also kleiner als $1/R^4$, und wenn wir umschreiben in ein Integral von 0 bis π , wozu wir mit $\dot{\gamma}(t)$ vom Betrag R multiplizieren müssen, immer noch kleiner als $1/R^3$. Somit verschwindet

dieses Integral für $R \rightarrow \infty$, und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$.