Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 30. Oktober 2003

Berechnen Sie für γ: $\begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 5\cos t + 2i\sin t \end{cases}$ die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{z^2+1}$ *b)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+9}$ *c)* $\displaystyle\int_\gamma \tan\frac{z}{2}\,dz$ *d)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sin z}$ *e)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{\sin z}$

f) Was ändert sich, wenn man stattdessen den Integrationsweg δ: $\begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 5\cos t - 2i\sin t \end{cases}$ betrachtet?

g) Berechnen Sie die Laurent-Reihe von $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^5}$ um den Punkt $z = 0$!

h) Berechnen Sie die Laurent-Reihe von $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ um den Punkt $z = i$!

i) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei eine ungerade holomorphe Funktion. Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{13}}\,dz$?

j) Was ist $\operatorname{Res}_{-1} \dfrac{z+2}{(z+1)^2}$?

k) Was ist $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\cos z}{z^2}$?

l) Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+2}{(z+1)^2}\,dz$ für obigen Integrationsweg γ ?

m) Zeigen Sie: Für ein Polynom f und einen geschlossenen, im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Integrationsweg, der ein Gebiet G berandet und auf dem keine Nullstelle von f liegt, ist $\frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ gleich der Anzahl der (mit Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von f in G.

n) Welchen Hauptteil hat die Funktion $\dfrac{\cos z}{z^4}$ bei $z = 0$?

o) Berechnen Sie die Hauptteile der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)^2}$ für $z = \pm ia$!

p) a sei eine positve reelle Zahl. Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$, wenn γ den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um Null mit Radius $R_1 = a/2$ *bzw* $R_2 = 2a$ bezeichnet?

q) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$?