

### Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 30. Oktober 2003

Berechnen Sie für  $\gamma: \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto 5 \cos t + 2i \sin t \end{cases}$  die folgenden Integrale:

a)  $\int_{\gamma} \frac{z \, dz}{z^2 + 1}$     b)  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 9}$     c)  $\int_{\gamma} \tan \frac{z}{2} \, dz$     d)  $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sin z}$     e)  $\int_{\gamma} \frac{z \, dz}{\sin z}$

f) Was ändert sich, wenn man stattdessen den Integrationsweg  $\delta: \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto 5 \cos t - 2i \sin t \end{cases}$  betrachtet?

g) Berechnen Sie die LAURENT-Reihe von  $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$  um den Punkt  $z = 0$ !

h) Berechnen Sie die LAURENT-Reihe von  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$  um den Punkt  $z = i$ !

i)  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  sei eine ungerade holomorphe Funktion. Was ist  $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{13}} \, dz$ ?

j) Was ist  $\text{Res}_{-1} \frac{z+2}{(z+1)^2}$ ?

k) Was ist  $\text{Res}_0 \frac{\cos z}{z^2}$ ?

l) Was ist  $\int_{\gamma} \frac{z+2}{(z+1)^2} \, dz$  für obigen Integrationsweg  $\gamma$ ?

m) Zeigen Sie: Für ein Polynom  $f$  und einen geschlossenen, im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Integrationsweg, der ein Gebiet  $G$  berandet und auf dem keine Nullstelle von  $f$  liegt,

ist  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz$  gleich der Anzahl der (mit Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von  $f$  in  $G$ .

n) Welchen Hauptteil hat die Funktion  $\frac{\cos z}{z^4}$  bei  $z = 0$ ?

o) Berechnen Sie die Hauptteile der Funktion  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2}$  für  $z = \pm ia$ !

p)  $a$  sei eine positive reelle Zahl. Was ist  $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2}$ , wenn  $\gamma$  den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um Null mit Radius  $R_1 = a/2$  bzw  $R_2 = 2a$  bezeichnet?

q) Was ist  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$ ?