WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515 A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. Oktober 2003

a) Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale

$$I_1 = \int_\gamma \frac{dz}{z}, \qquad I_2 = \int_\gamma \frac{dz}{z-3}, \qquad I_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \qquad I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}, \qquad I_5 = \int_\gamma e^{\cos z}\, dz$$

Lösung: Der Integrationsweg γ ist eine Kreislinie um den Nullpunkt mit Radius zwei, die im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Daher ist $I_1 = 2\pi i$, wie wir in der Vorlesung sogar für noch allgemeinere Kurven um den Nullpunkt gezeigt haben.

Der Integrand $1/(z-3)$ von I_2 ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{3\}$; in einer offenen Menge also, die sowohl dasInnern der Kreisscheibe um Null mit Radius zwei als auch deren Rand enthält. Daher verschwindet das Integral nach dem CAUCHYschen Integralsatz.

Der Integrand $1/z^2$ von I_3 ist natürlich nicht holomorph im Nullpunkt, aber wir haben mit $F(z) = -1/z$ eine Stammfunktion, die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist. Insbesondere ist sie holomorph in eienr Umgebung des Integrationswegs; daher ist

$$I_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2} = F\big(\gamma(\pi)\big) - F\big(\gamma(-\pi)\big) = 0\,,$$

da $\gamma(\pi) = \gamma(-\pi) = -1$ ist.

Der Integrand $1/(z^2+1)$ von I_4 ist gleich an zwei inneren Punkten der Kreisscheibe nicht holomorph: Bei $z = i$ und bei $z = -i$. Der Ansatz

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{\alpha}{z-i} + \frac{\beta}{z+i} = \frac{(\alpha+\beta)z + (\beta-\alpha)i}{z^2+1}$$

zur Partialbruchzerlegung führt auf $\alpha = -\beta = \frac{i}{2}$, also ist

$$I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z-i} - \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z+i}\,.$$

Beide Integrale auf der rechten Seite sind Integrale über einen Integranden der Form $1/(z-a)$ mit einem Punkt a, der im Innern der Kreisscheibe liegt; also haben beide den Wert$2\pi i$. Da die Vorfaktoren entgegengesetzt gleich sind, verschwindet die Summe I_4.

Der Integrand von I_5 ist als Hintereinanderausführung zweier auf ganz $\mathbb{C}$ holomorpher Funktionen selbst auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph; damit ist klar, daß *jedes* Integral längs einer geschlossenen Kurve nach dem CAUCHYschen Integralsatz verschwindet.

b) Welche dieser Integrale ändern Ihren Wert, wenn man stattdessen den Integrationsweg $\delta\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 3 + e^{it} \end{cases}$ betrachtet?

Lösung: δ beschreibt einen Kreis um drei mit Radius eins, der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. In der zugehörigen Kreisscheibe sowie einer Umgebung davon sind die

Integranden von I_1, I_3, I_4 und I_5 holomorph, also verschwinden die entsprechenden Integrale. Bei I_2 führt die Transformation $u = z - 3$ auf das Integral über $1/u$ über einen Kreis um Null, das Integral ist also gleich $2\pi i$.

c) Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

$$J_1 = \int_\gamma z\,dz, \qquad J_2 = \int_\gamma \frac{dz}{z}, \qquad J_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \qquad J_4 = \int_\gamma e^z\,dz, \qquad J_5 = \int_\gamma \cos z\,dz$$

Lösung: Hier integrieren wir nur über einen Halbkreis; er hat den Radius zwei um Null und geht von $-i$ durch das Gebiet $\mathfrak{Re}\, z > 0$ nach $+i$. Damit sind die Sätze der Vorlesung, soweit sie sich auf geschlossene Integrationswege beziehen, nicht anwendbar. Wir müssen daher entweder den Umweg übers Reelle gehen oder eine in einer Umgebung des Integrationswegs holomorphe Stammfunktion finden.
Für den Integranden z von J_1 ist $\frac{1}{2}z^2$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Stammfunktion, also ist

$$J_1 = \frac{1}{2}\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \gamma\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2\right) = \frac{(2i)^2 - (-2i)^2}{2} = 0\,.$$

Im Falle von J_2 können wir dafür den Hauptwert des natürlichen Logarithmus nehmen, der ja auf $\mathbb{C}$ minus der negativen reellen Achse holomorph ist. Also ist

$$J_2 = \operatorname{Ln}\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{Ln}\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\ln 2 + \frac{\pi i}{2}\right) - \left(\ln 2 - \frac{\pi i}{2}\right) = \pi i\,,$$

denn $\operatorname{Ln}(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$, falls φ im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ liegt.
Für J_3 haben wir $-1/3z^3$ als auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Stammfunktion; da unser Integrationsweg nicht durch den Nullpunkt geht, ist

$$J_3 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} - \frac{1}{\gamma\left(\frac{-\pi}{2}\right)^3}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2i)^3} - \frac{1}{(-2i)^3}\right) = -\frac{1}{3}\,\frac{-2i - 2i}{4} = \frac{i}{6}\,.$$

Die Exponentialfunktion ist ihre eigene, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Stammfunktion; somit ist

$$J_4 = e^{\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)} - e^{\gamma\left(\frac{-\pi}{2}\right)} = e^{2i} - e^{-2i} = 2\cos 2\,.$$

Für J_5 schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} J_5 &= -\sin\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\gamma\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\sin 2i + \sin(-2i) = -2\sin 2i \\ &= -2\frac{e^{-2} - e^2}{2i} = (e^2 - e^{-2})i = 2i\sinh 2\,. \end{aligned}$$

d) Was ändert sich, wenn Sie bei J_1 bis J_5 statt über γ über $\delta\colon \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto -2e^{-it} \end{cases}$ integrieren?

Lösung: Der neue Integrationsweg geht von $-2e^{-\pi i/2} = 2i$ im Gegenuhrzeigersinn nach $-2e^{\pi i/2} = -2i$, ebenfalls auf dem Kreis mit Radius zwei um den Nullpunkt. Der neue Integrationsweg ergänzt also den alten zur vollen Kreislinie. Das Integral längs der vollen Kreislinie verschwindet für die Integranden von J_1, J_4 und J_5 nach dem CAUCHYschen

Integralsatz und im Falle von J_3, da – wie wir oben gesehen haben – das Integral I_3 verschwindet. Somit ändert sich in diesen Fällen einfach das Vorzeichen.

Im Falle von I_2 ergänzen sich die beiden Integrale zum Integral über $1/z$ längs eines Kreises um den Nullpunkt, also zu $2\pi i$. Also ist auch das Integral längs des neuen Integrationswegs gleich πi.

e) Was ist $\operatorname{Ln} i$?

Lösung: Da $e^{\pi i/2} = i$ ist, folgt $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$.

f) *Richtig oder falsch:* $\operatorname{Ln}(z \cdot w) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} w$ für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Lösung: *Falsch,* für $z = w = -1$ etwa ist $\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} w = \pi i + \pi i = 2\pi i$, aber $\operatorname{Ln}(z \cdot w) = \operatorname{Ln} 1 = 0$.

g) *Richtig oder falsch:* $f(z) = \operatorname{Ln} z - 4\pi i$ ist eine Umkehrfunktion von $z \mapsto e^z$.

Lösung: *Richtig,* denn $e^{f(z)} = e^{\operatorname{Ln} z - 4\pi i} = e^{\operatorname{Ln} z} e^{-4\pi i} = e^{\operatorname{Ln} z} = z$.

h) Zeigen Sie: Für $|z| < 1$ ist $\Re \dfrac{1 - iz}{1 + iz} > 0$.

Lösung:

$$\frac{1 - iz}{1 + iz} = \frac{(1 - iz)(1 - i\bar{z})}{(1 + iz)(1 - i\bar{z})} = \frac{(1 - z\bar{z} - i(z + \bar{z})}{|1 - iz|^2} = \frac{(1 - |z|^2 - 2i \Re z}{|1 - iz|^2}$$

hat Realteil $\dfrac{1 - |z|^2}{|1 - iz|^2}$, was für $|z| < 1$ in der Tat positiv ist.

i) Zeigen Sie: Für $|z| < 1$ ist $f(z) = \dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$ eine holomorphe Umkehrfunktion von $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$!

Lösung: Da $\operatorname{Ln} w$ im Bereich $\Re w > 0$ holomorph ist und da $\dfrac{1 - iz}{1 + iz}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, also insbesondere für $|z| < 1$ holomorph ist, zeigt die vorige Aufgabe, daß f dort in der Tat eine holomorphe Funktion definiert. Um zu zeigen, daß sie Umkehrfunktion des Tangens ist, schreiben wir diesen als

$$\tan w = \frac{\sin}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} .$$

Wenn wir hier $w = f(z)$ einsetzen, erhalten wir z.B.

$$e^{if(z)} = e^{-\frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 - iz}{1 + iz}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - iz}{1 + iz}}} .$$

Solche Wurzeln sind unangenehm und müssen durch geeignete Umformungen eliminiert werden. Wahrscheinlich ist es übersichtlicher, bereits in der obigen Formel für den Tangens beispielsweise mit $e^{iw} - e^{iw}$ zu erweitern, um nur noch Terme der Form $e^{\pm 2iw}$ zu haben:

$$\tan w == \frac{(e^{iw} - e^{-iw})^2}{i(e^{iw} + e^{-iw})(e^{iw} - e^{-iw})} = \frac{e^{2iw} + e^{-2iw} + 2}{i(e^{2iw} - e^{-2iw})} .$$

Einsetzen von $w = f(z)$ ergibt

$$e^{2if(z)} = e^{-\operatorname{Ln}\frac{1-iz}{1+iz}} = \frac{1}{e^{\operatorname{Ln}\frac{1-iz}{1+iz}}} = \frac{1}{\frac{1-iz}{1+iz}} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

und

$$e^{-2if(z)} = e^{\operatorname{Ln}\frac{1-iz}{1+iz}} = \frac{1-iz}{1+iz}\,,$$

also

$$\begin{aligned} e^{2if(z)} + e^{-2if(z)} &= \frac{1+iz}{1-iz} + \frac{1-iz}{1+iz}\frac{(1+iz)^2+(1-iz)^2}{(1+iz)(1-iz)} = \frac{2-2z^2}{1+z^2}\,, \\ e^{2if(z)} + e^{-2if(z)} - 2 &= \frac{2-2z^2}{1+z^2} - 2 = \frac{2-2z^2-2(1+z^2)}{1+z^2} = \frac{-4z^2}{1+z^2} \end{aligned}$$

und

$$e^{2if(z)} - e^{-2if(z)} = \frac{1+iz}{1-iz} - \frac{1-iz}{1+iz}\frac{(1+iz)^2-(1-iz)^2}{(1+iz)(1-iz)} = \frac{4iz}{1+z^2}\,.$$

Also ist

$$\tan f(z) = \frac{\frac{-4z^2}{1+z^2}}{i\cdot\frac{4iz}{1+z^2}} = \frac{-4z^2}{-4z} = z\,.$$

j) Was ist $f'(z)$?

Lösung: Da $\tan' w = 1 + \tan^2 w$, ist für $z = \tan w$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2}\,.$$

k) Berechnen Sie damit für γ: $\begin{cases} [0,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{1}{2}e^{it} \end{cases}$ das Integral $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$!

Lösung: Da der Integrationsweg wie auch sein Innengebiet ganz im Gebiet $|z| < 1$ liegt, haben wir dort $f(z) = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1-iz}{1+iz}$ als holomorphe Stammfunktion des Integranden. Damit ist

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = f\big(\gamma(\pi)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = f\big(-\tfrac{1}{2}\big) - f\big(\tfrac{1}{2}\big)\,.$$

f ist für $|z| < 1$ die Umkehrfunktion des Tangens; daher ist für reelle Argumente x vom Betrag kleiner eins $f(x) = \arctan x$. Also ist

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = \arctan\frac{1}{2} - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\arctan\frac{1}{2} \approx 0{,}927295218\,.$$

l) Welche der folgenden Funktionen sind holomorph *bzw.* meromorph auf $\mathbb{C}$?

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}, \qquad g(z) = e^z - e^{\overline{z}}, \qquad h(z) = \frac{1}{e^z - e^{\overline{z}}}, \qquad k(z) = \frac{1}{\cos z}$$

Lösung: f ist nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, da die Funktion in den Punkten $\pm i$ nicht einmal definiert ist. Sie ist allerdings meromorph, denn

$$(z-i)\cdot\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z+i}$$

ist holomorph in einer Umgebung von i,

$$(z+i)\cdot\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z-i}$$

in einer Umgebung von $-i$.

g ist h sind auf ganz $\mathbb{C}$ definiert, allerdings läßt das Auftreten von $\overline{z}$ erwarten, daß es Schwierigkeiten mit der Holomorphie geben könnte. In der Tat ist $e^{\overline{z}}=\overline{e^z}$, so daß $e^z-e^{\overline{z}}$ rein imaginär ist. Somit nehmen g und h nur rein imaginäre Werte an. Zerlegt man die Funktionen in Real- und Imaginärteil, so ist also der Realteil identisch null. Wäre eine der beiden Funktionen holomorph, müßten nach den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen daher die beiden partiellen Ableitungen des Imaginärteils verschwinden, d.h. dieser und damit die Funktion selbst müßte konstant sein, was offensichtlich nicht der Fall ist. Somit sind g und h beide weder holomorph noch meromorph.

$k(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ ist natürlich nicht holomorph; an den Nullstellen des Kosinus ist die Funktion nicht definiert. Daß die Funktion trotzdem meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, folgt genauso wie in der Vorlesung beim Beweis der Meromorphie des Tangens, denn in beiden Fällen geht es um nur um das Problem des Kosinus im Nennen.