Wolfgang K. Seiler A5, C201
*Tel.* 2515

*9. Februar 2004*

## 15. Übungsblatt Höhere Mathematik II

**Gleichzeitig Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 12. Februar 2004**

**Fragen:** *(je ein Punkt)*
*Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine* kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

*1) Richtig oder falsch:* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Falls $f$ in einem Punkt $\mathbf{x}$ des Würfels $-1 \le x_i \le 1$ für $i = 1, \ldots, n$ ein Maximum annimmt, ist dort $\operatorname{grad} f = \vec{0}$.

**Lösung:** *Falsch;* die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum x_i$ etwa hat ihr Maximum im Punkt $(1, \ldots, 1)$, und dort, wie überall, sind alle Komponenten des Gradienten gleich eins.

*2) Richtig oder falsch:* $f$ sei auf $D = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| < 2\right\}$ definiert und $\nabla f$ sei dort nirgends gleich dem Nullvektor. Dann nimmt $f$ sowohl sein Maximum als auch sein Minimum in $M = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| \le 1\right\}$ auf der Einheitssphäre $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| = 1\right\}$ an.

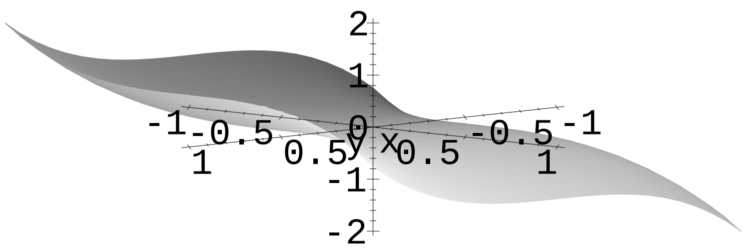
**Lösung:** *Richtig:* Da $M$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt ist, muß $f$ dort sein Maximum und sein Minimum annehmen. (Da $\nabla f$ als existent vorausgesetzt wird, ist $f$ insbesondere stetig.) Würde einer dieser Werte im Innern angenommen, müßte dort $\nabla f$ verschwinden.

*3) Richtig oder falsch:* Falls die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nirgends ein Maximum hat, ist sie unbeschränkt.

**Lösung:** *Falsch:* Die Funktion $1 - e^{x^2+y^2}$ ist überall kleiner als eins, hat aber kein Maximum in $\mathbb{R}^2$, da sie mit wachsendem Betrag von $x$ und $y$ immer größer wird.

*4)* Konstruieren Sie eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die keine der beiden partiellen Ableitungen überall verschwindet, aber $\nabla f(0,0) = \vec{0}$ ist, ohne daß der Nullpunkt Maximum, Minimum oder Sattelpunkt wäre!

**Lösung:** z.B. $f(x, y) = x^3 - y^3$; siehe Abbildung.



5) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

**Lösung:** *Falsch,* denn ihre Determinante ist null. (Die quadratische Form zu dieser Matrix ist $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$, und das verschwindet nicht nur im Nullpunkt, sondern auf der ganzen ersten Winkelhalbierenden; die Matrix ist also, obwohl die Form keine negativen Werte annehmen kann, nur positiv semidefinit.)

6) *Richtig oder falsch:* Verdoppelt man alle Werte einer Meßreihe, verdoppelt sich dadurch auch die Standardabweichung.

**Lösung:** *Richtig:* Da sich auch der Mittelwert verdoppelt, vervierfacht sich die Varianz; die Standardabweichung als deren Quadratwurzel verdoppelt sich also.

7) Nach dem Brechungsgesetz gilt für die Winkel $\alpha$ des einfallenden und $\beta$ des gebrochenen Strahls die Beziehung $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n$, wobei $n$ der (relative) Brechungsindex ist. Wie wirken sich Fehler bei der Bestimmung von $\alpha$ und $\beta$ auf $n$ aus?

**Lösung:** Nach dem Fehlerfortpfanzungsgesetz ist

$$\Delta n \approx \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial\alpha}\Delta\alpha\right)^2+\left(\frac{\partial n}{\partial\beta}\Delta\beta\right)^2}=\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}(\Delta\alpha)^2+\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^4\beta}(\Delta\beta)^2}\,.$$

8) Zehn Dämonen seien nach den Regeln des LAPLACEschen Fehlermodells damit beschäftigt, Ihre Meßergebnisse zu verfälschen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ergebnis trotzdem richtig ist?

9) Eine Meßreihe habe Mittelwert 3,8 und Standardabweichung 0,1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der dritte Meßwert größer als vier?

**Lösung:** Vier ist um zwei Standardabweichungen größer als der Mittelwert, die Wahrscheinlichkeit, daß der dritte (oder sonst irgendein fester) Meßwert größer ist, liegt also bei $1-F(2)\approx 0{,}02275$ mit

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt\,.$$

10) Zur Bestimmung des wahren Werts einer physikalischen Meßgröße werde diese fünfzigmal gemessen; die entsprechende Meßreihe habe einen Mittelwert von 3,145 und eine Standardabweichung von 0,07. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Wert zwischen 3,14 und 3,145?

**Lösung:** $\frac{3{,}14-3{,}145}{0{,}07}\approx -0{,}0714$; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also ungefähr

$$F(0)-F(-0{,}0714)=\frac{1}{2}-\big(1-F(0{,}0714)\big)=F(0{,}0714)-\frac{1}{2}\approx 0{,}0285\,.$$

11) Bestimmen Sie ein Intervall, in dem der wahre Wert mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit liegt!

**Lösung:** Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wert um höchstens $z$ Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt liegt, ist $F(z)-F(-z)=2F(z)-1$. Anhand einer Tabelle für $F$ oder durch Rechnung läßt sich näherungasweise der Wert $z\approx 2{,}5758$ bestimmen, für den dies gleich 0,99 wird. Das gesuchte Intervall ist also ungefähr

$$[3{,}145-2{,}5758\cdot 0{,}07,\ \ 3{,}145+2{,}5758\cdot 0{,}07]=[2{,}965,\ 3{,}325]\,.$$

*12)* Die Zufallsvariable X habe Mittelwert $\overline{x}$ und Standardabweichung $\sigma$. Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen $U = 2X + 1$ !

**Lösung:** Der Mittelwert ist natürliche einfach $\overline{u} = 2\overline{x} + 1$; für jedes $u = 2x + 1 \in \mathbb{R}$ ist daher $(u - \overline{u})^2 = 4(x - \overline{x})^2$. Die Standardabweichung von U ist somit gleich $2\sigma$.

**Aufgabe 1:** *(5 Punkte)*

*a)* Bestimmen Sie alle (lokalen) Maxima und Minima sowie die Sattelpunkte der Funktion $f(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$ in $\mathbb{R}^2$ !

**Lösung:** Die erste Komponente des Gradienten

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -3y^2 + 3x^2 \\ 4y^3 - 6xy \end{pmatrix}$$

verschwindet genau dann, wenn $x = \pm y$ ist. Alsdann verschwindet die zweite Komponente genau dann, wenn $4y^3 = \pm 6y^2$ ist.

Dies ist sicherlich dann der Fall, wenn $y$ verschwindet; alsdann verschwindet auch $x = \pm y$ und auch $f(0, 0) = 0$. Da $f(x, 0) = x^3$ in der Umgebung des Nullpunkts sowohl positive als auch negative Werte annimmt, ist der Nullpunkt weder Maximum noch Minimum; er ist auch kein Sattelpunkt im Sinne der Vorlesung, da die HESSE-Matrix

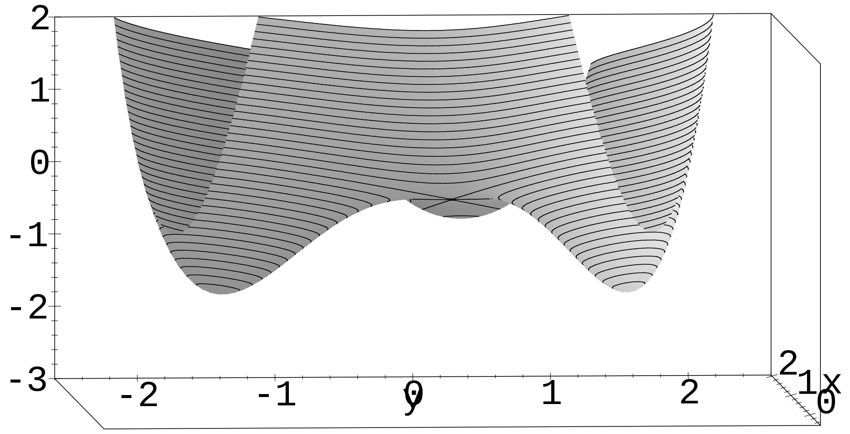
$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 12y^2 - 6x \end{pmatrix}$$

dort verschwindet, also nur null als Eigenwert hat.

Für $y \neq 0$ können wir die Gleichung $4y^3 = \pm 6y^2$ durch $4y^2$ dividieren und erhalten $y = \pm\frac{3}{2}$ und $x = \frac{3}{2}$. Hier hat

$$H\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 9 & \mp 9 \\ \mp 9 & 18 \end{pmatrix}$$

Determinante 81 und positive Einträge auf der Hauptdiagonalen, ist also positiv definit. Somit nimmt f dort Minima an.



*b)* Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 80 DM, 12 DM *bzw.* 10 DM pro Einheit kosten. Aus $x$ Einheiten der ersten, $y$ Einheiten der zweiten und $z$ Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 24 000 DM maximal gefertigt werden?

**Lösung:** Offensichtlich sind nur nichtnegative Werte für $x, y$ und $z$ sinnvoll. Falls man daher zwei der Variablen festhält, ist

$$f(x,y,z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$$

monoton in der dritten; da auch die Kostenfunktion

$$g(x,y,z) = 80x + 12y + 10z$$

diese Eigenschaft hat, wird das Maximum in einem Punkt angenommen, in dem die Kosten das Limit erreichen, d.h. $g(x,y,z) = 24\,000$.
Dort müssen die Gradienten von $f$ und $g - 24\,000$, also

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 80 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix},$$

linear abhängig sein; da $\nabla g$ nirgends verschwindet, muß es somit ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so daß $\nabla f = \lambda \nabla g$ ist oder

$$\begin{aligned} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 80\lambda \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 10\lambda\,. \end{aligned}$$

Durch Kürzen kann man alle rechten Seiten zu $\lambda$ machen; um Nenner zu vermeiden, ist es allerdings besser, sie zu $12\lambda$ zu machen; dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 12x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 12\lambda\,. \end{aligned}$$

Daher ist $3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} = 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} = 12x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5}$.
Multiplikation mit $x^{3/5}y^{4/5}z^{4/5}$ macht daraus $3yz = 10xz = 12xy$.
Da das Maximum der Produktionsfunktion $f$ auf jeden Fall positiv ist, kann dort keine der drei Variablen verschwinden; wir können also unbesorgt kürzen und erhalten die drei Gleichungen

$$3y = 10x, \quad 10z = 12y \quad \text{und} \quad 3z = 12x\,,$$

d.h.

$$z = 4x \quad \text{und} \quad y = \frac{10}{3}x\,.$$

Unter diesen Bedingungen ist

$$g(x,y,z) = 80x + 40x + 40x = 160x\,;$$

dies ist genau dann gleich 24 000, wenn $x = 150$ ist. Damit kennen wir auch

$$y = \frac{10}{3}x = 500, \quad z = 4x = 600\,,$$

und

$$f(x,y,z) = 50 \cdot 150^{\frac{2}{5}} \cdot 500^{\frac{1}{5}} \cdot 600^{\frac{1}{5}} = 50 \cdot \sqrt[5]{150^2 \cdot 500 \cdot 600} = 50\sqrt[5]{76750\,000\,000} \approx 92{,}44\,.$$

Also lassen sich maximal 92 Einheiten fertigen.

**Aufgabe 2:** (*5 Punkte*)

*a)* Beschreiben Sie die Menge

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1 \right\}$$

geometrisch!

**Lösung:** Das ist natürlich eine (Voll-)Ellipse mit Halbachsen 2 und 3.

*b)* Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ in $M$!

**Lösung:** $\nabla f = \binom{2x}{2y-2}$ verschwindet nur im Punkt $(0, 1)$; dort (wie überall) ist die Hesse-Matrix

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

als positives Vielfaches der Einheitsmatrix positiv definit, also hat $f$ dort ein Minimum. Dieses liegt in der Ellipse $M$, ist also eine Lösung.

Alle weiteren Extrema müssen auf dem Rand liegen. Der Gradient der Ellipsengleichung ist $\binom{x/2}{2y/9}$; da er nur im Nullpunkt verschwindet, der nicht auf der (Rand)-Ellipse liegt, gibt es für jedes weitere Extremum ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß

$$2x = \lambda \frac{x}{2} \quad \text{und} \quad 2y - 2 = 2\lambda \frac{y}{9}$$

ist, d.h.

$$(4 - \lambda)x = 0 \quad \text{und} \quad (9 - \lambda)y = 9\,.$$

Ist $x = 0$, so ist wegen der Ellipsengleichung $y = \pm 3$ und $\lambda$ läßt sich aus der zweiten Gleichung bestimmen; andernfalls ist $\lambda = 4$, also $y = 9/5$ und aufgrund der Ellipsengleichung $x = \pm 2/5$. Die Funktionswerte sind jeweils

$$f(0, \pm 3) = 9 \mp 6 = \begin{cases} 3 \\ 15 \end{cases} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{9}{5}, \pm\frac{2}{5}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{5} \\ 7 \end{cases}.$$

Da die zu optimierende Funktion auf dem Rand der Ellipse stetig ist, müssen dort also in $(0, 3)$ und $(9/5, 2/5)$ Minima vorliegen und in den anderen beiden Punkten Maxima.

**Aufgabe 3:** (*5 Punkte*)

*a)* Bestimmen Sie den größten Quader mit achsenparallelen Kanten, der im Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

liegt!

**Lösung:** Offensichtlich kann man einen Quader mit achsenparallelen Kanten, dessen Ecken *nicht* auf der Oberfläche des Ellipsoids liegen, noch vergrößern; die Ecken des größten liegen also dort. Dann haben sie zwangsläufig die Koordinaten $(\pm x, \pm y, \pm z)$ mit geeigneten positiven reellen Zahlen $x, y, z$, die die Ellipsoidgleichung erfüllen; das Volumen ist $8xyz$. Somit müssen wir die Funktion $f(x, y, z) = 8xyz$ maximieren unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,.$$

Für die Lösung sind

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8yz \\ 8xz \\ 8xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix}$$

proportional, es gibt also ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß gilt

$$8yz = \frac{2\lambda x}{a^2}, \qquad 8xz = \frac{2\lambda y}{b^2} \quad \text{und} \quad 8xy = \frac{2\lambda z}{c^2}.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $x$, die zweite mit $y$ und die dritte mit $z$, folgt also, daß

$$8xyz = \frac{2\lambda x^2}{a^2} = \frac{2\lambda y^2}{b^2} = \frac{2\lambda z^2}{c^2}$$

ist. Da das Volumen des größten Quaders sicherlich nicht verschwindet, muß auch $\lambda$ von Null verschieden sein; wir können also, wenn wir nur die rechten drei Terme betrachten, durch $2\lambda$ kürzen und erhalten dann wegen der Nebenbedingung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3},$$

aus denen sofort die Lösung

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}b \quad \text{und} \quad z = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$

folgt.

*b)* Die Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Gleichung

$$(x, y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1,$$

wobei die Determinante der symmetrischen $2 \times 2$-Matrix $A$ von Null verschieden sei. Bestimmen Sie jene Punkte der Quadrik, in denen der Abstand zum Punkt $(0, 0)$ ein relatives Minimum annimmt! Lassen sich diese Punkte auch geometrisch interpretieren?

**Lösung:** Gesucht sind Punkte, für die $f(x, y) = x^2 + y^2$ minimal wird unter der Nebenbedingung $(x, y)A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 1$. Mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ wird letzteres zu

$$g(x, y) = ax^2 + cy^2 + 2bxy - 1 = 0.$$

Die Gradienten sind

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2ax + 2by \\ 2cy + 2bx \end{pmatrix};$$

da der Nullpunkt nicht auf der Quadrik liegt, muß es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit

$$ax + by = \lambda x \quad \text{und} \quad cy + bx = \lambda y$$

oder

$$(a - \lambda)x + by = 0 \quad \text{und} \quad bx + (c - \lambda)y = 0.$$

Da der Nullpunkt nicht auf der Quadrik liegt; brauchen wir eine nichttriviale Lösung dieses homogenen linearen Gleichungssystems für $x, y$; diese existiert genau dann, wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet, wenn also $\lambda$ Eigenwert der Matrix $A$ ist.

Falls $A$ zwei gleiche Eigenwerte hat, ist die Quadrik ein Kreis um Null und jeder Punkt ist Lösung; andernfalls gibt es zwei verschiedene Eigenwerte und die gesuchten Lösungspunkte sind unter den Schnittpunkten der Quadrik mit den durch die Eigenräume definierten Geraden. Wie viele der (bis zu vier) Schnittpunkte existieren hängt von $A$ ab; mindestens einer davon ist Lösung des Problems.

Geometrisch betrachtet handelt es sich um die Schnittpunkte der Quadrik mit ihren Hauptachsen, bei einer Ellipse etwa um die Endpunkte der großen (maximaler Abstand) und der kleinen Halbachse, bei einer Hyperbel um die beiden Scheitelpunkte.

**Aufgabe 4:** (*5 Punkte*)
Zwischen 1911 und 1960 wurden jedes Jahr die mittleren Oktobertemperaturen in München gemessen; der Mittelwert der 50 Werte ist 7,974 und die Standardabweichung 1,416. Wir nehmen an, die Meßwerte seien normalverteilt.

*a)* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die mittlere Temperatur in einem bestimmten Jahr zwischen sieben und acht Grad liegt?

**Lösung:** Die Normalisierungen der beiden Werte sind

$$\frac{7-7{,}974}{1{,}416} \approx -0{,}6879 \quad \text{und} \quad \frac{8-7{,}974}{1{,}416} \approx 0{,}0184\,;$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also etwa

$$F(0{,}0184) - F(-0{,}6879) = F(0{,}0184) - 1 + F(0{,}6879) \approx 0{,}2616$$

mit

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt\,.$$

*b)* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie unter sechs Grad sinkt?

**Lösung:**

$$F\left(\frac{6-7{,}974}{1{,}416}\right) \approx F(-1{,}394) = 1 - F(1{,}394) \approx 0{,}0816$$

*c)* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie auf über zehn Grad steigt?

**Lösung:**

$$1 - F\left(\frac{10-7{,}974}{1{,}416}\right) \approx 1 - F(1{,}431) \approx 0{,}0752$$

*d)* Wie warm muß es werden, daß man von einem „Jahrhundertherbst“, reden kann, d.h. einen Oktober, der so warm ist, wie es nur einmal alle hundert Jahre vorkommt?

**Lösung:** Der Wert $z$, für den $F(z) = 0{,}99$ ist, kann mittels Tabelle oder Rechnung näherungsweise bestimmt werden; er liegt bei etwa 2,326. Die gesuchte mittlere Mindestemperatur für einen Jahrhundertherbst liegt also etwa bei

$$7{,}974 + 2{,}326 \cdot 1{,}416 \approx 11{,}27$$

Grad.

**Aufgabe 5:** (*5 Punkte*)

*a)* Der jährliche Höchststand des Pegels Haltern des Flusses Stever ist mit ziemlich guter Genauigkeit normalverteilt mit Mittelwert $4\,\mathrm{m}$ und Standardabweichung $2\,\mathrm{m}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er 2005 zwischen zwei und drei Metern liegt?

**Lösung:** $F(z)$ sei hier stets die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Die Pegelstände $2\,\mathrm{m}$ und $3\,\mathrm{m}$ liegen eine *bzw.* eine halbe Standardabweichung unter dem Mittelwert, die Wahrscheinlichkeit ist also

$$F(-0{,}5)-F(-1) = \big(1-F(0{,}5)\big)-\big(1-F(1)\big) = F(1)-F(0{,}5) \approx 0{,}841345-0{,}691462 = 0{,}14988$$

oder etwa 15%.

*b)* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fluß nächstes Jahr irgendwann einen Pegelstand von mehr als sieben Meter erreicht?

**Lösung:** Das wären mehr als die eineinhalbfache Standardabweichungen; die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$1 - F(3/2) \approx 0{,}0668\,.$$

*c)* Was können Sie über die entsprechende Wahrscheinlichkeit für letztes Jahr sagen?

**Lösung:** Da das letzte Jahr vorbei ist, gab es entweder einmal einen Pegelstand von über sieben Meter oder nicht; die Wahrscheinlichkeit ist also entweder eins oder null. Wer Genaueres wissen will, frage einen kundigen Einwohner von Haltern.

*d)* Ab welchem Pegelstand kann man von einem Jahrhunderthochwasser reden?

**Lösung:** Ein Jahrhunderthochwasser tritt auf, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen so hohen Pegelstand höchstens 1/100 ist. Die Gleichung $F(z) = 0{,}99$ hat die Lösung $z \approx 2{,}33$, der Pegelstand muß also mindestens $4 + 2{,}33 \cdot 2 = 8{,}66$ m betragen.

*e)* Können Sie auch sagen, ab welchem Pegelstand man von einem Jahrhhunderttiefststand reden kann?

**Lösung:** Wegen der Formel $F(-z) = 1 - F(z)$ muß hier der Pegellstand um 2,33 Standardabweichungen *unter* dem Mittelwert liegen, also bei -66 cm. Ob das physikalisch möglich ist, hängt von den lokalen Gegebenheiten in Haltern ab; möglicherweise ist man hier aber schon in einem Bereich, in dem die Approximation durch eine Normalverteilung nicht mehr richtig sein kann.

*WEITERHIN SCHÖNE FERIEN !*

**Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung**

| $z$ | $F(z)$ | $z$ | $F(z)$ | $z$ | $F(z)$ | $z$ | $F(z)$ | $z$ | $F(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,500000 | 0,01 | 0,503989 | 0,02 | 0,507978 | 0,03 | 0,511966 | 0,04 | 0,515953 |
| 0,05 | 0,519939 | 0,06 | 0,523922 | 0,07 | 0,527903 | 0,08 | 0,531881 | 0,09 | 0,535856 |
| 0,10 | 0,539828 | 0,11 | 0,543795 | 0,12 | 0,547758 | 0,13 | 0,551717 | 0,14 | 0,555670 |
| 0,15 | 0,559618 | 0,16 | 0,563559 | 0,17 | 0,567495 | 0,18 | 0,571424 | 0,19 | 0,575345 |
| 0,20 | 0,579260 | 0,21 | 0,583166 | 0,22 | 0,587064 | 0,23 | 0,590954 | 0,24 | 0,594835 |
| 0,25 | 0,598706 | 0,26 | 0,602568 | 0,27 | 0,606420 | 0,28 | 0,610261 | 0,29 | 0,614092 |
| 0,30 | 0,617911 | 0,31 | 0,621720 | 0,32 | 0,625516 | 0,33 | 0,629300 | 0,34 | 0,633072 |
| 0,35 | 0,636831 | 0,36 | 0,640576 | 0,37 | 0,644309 | 0,38 | 0,648027 | 0,39 | 0,651732 |
| 0,40 | 0,655422 | 0,41 | 0,659097 | 0,42 | 0,662757 | 0,43 | 0,666402 | 0,44 | 0,670031 |
| 0,45 | 0,673645 | 0,46 | 0,677242 | 0,47 | 0,680822 | 0,48 | 0,684386 | 0,49 | 0,687933 |
| 0,50 | 0,691462 | 0,51 | 0,694974 | 0,52 | 0,698468 | 0,53 | 0,701944 | 0,54 | 0,705401 |
| 0,55 | 0,708840 | 0,56 | 0,712260 | 0,57 | 0,715661 | 0,58 | 0,719043 | 0,59 | 0,722405 |
| 0,60 | 0,725747 | 0,61 | 0,729069 | 0,62 | 0,732371 | 0,63 | 0,735653 | 0,64 | 0,738914 |
| 0,65 | 0,742154 | 0,66 | 0,745373 | 0,67 | 0,748571 | 0,68 | 0,751748 | 0,69 | 0,754903 |
| 0,70 | 0,758036 | 0,71 | 0,761148 | 0,72 | 0,764238 | 0,73 | 0,767305 | 0,74 | 0,770350 |
| 0,75 | 0,773373 | 0,76 | 0,776373 | 0,77 | 0,779350 | 0,78 | 0,782305 | 0,79 | 0,785236 |
| 0,80 | 0,788145 | 0,81 | 0,791030 | 0,82 | 0,793892 | 0,83 | 0,796731 | 0,84 | 0,799546 |
| 0,85 | 0,802337 | 0,86 | 0,805105 | 0,87 | 0,807850 | 0,88 | 0,810570 | 0,89 | 0,813267 |
| 0,90 | 0,815940 | 0,91 | 0,818589 | 0,92 | 0,821214 | 0,93 | 0,823814 | 0,94 | 0,826391 |
| 0,95 | 0,828944 | 0,96 | 0,831472 | 0,97 | 0,833977 | 0,98 | 0,836457 | 0,99 | 0,838913 |
| 1,00 | 0,841345 | 1,01 | 0,843752 | 1,02 | 0,846136 | 1,03 | 0,848495 | 1,04 | 0,850830 |
| 1,05 | 0,853141 | 1,06 | 0,855428 | 1,07 | 0,857690 | 1,08 | 0,859929 | 1,09 | 0,862143 |
| 1,10 | 0,864334 | 1,11 | 0,866500 | 1,12 | 0,868643 | 1,13 | 0,870762 | 1,14 | 0,872857 |
| 1,15 | 0,874928 | 1,16 | 0,876976 | 1,17 | 0,879000 | 1,18 | 0,881000 | 1,19 | 0,882977 |
| 1,20 | 0,884930 | 1,21 | 0,886861 | 1,22 | 0,888768 | 1,23 | 0,890651 | 1,24 | 0,892512 |
| 1,25 | 0,894350 | 1,26 | 0,896165 | 1,27 | 0,897958 | 1,28 | 0,899727 | 1,29 | 0,901475 |
| 1,30 | 0,903200 | 1,31 | 0,904902 | 1,32 | 0,906582 | 1,33 | 0,908241 | 1,34 | 0,909877 |
| 1,35 | 0,911492 | 1,36 | 0,913085 | 1,37 | 0,914657 | 1,38 | 0,916207 | 1,39 | 0,917736 |
| 1,40 | 0,919243 | 1,41 | 0,920730 | 1,42 | 0,922196 | 1,43 | 0,923641 | 1,44 | 0,925066 |
| 1,45 | 0,926471 | 1,46 | 0,927855 | 1,47 | 0,929219 | 1,48 | 0,930563 | 1,49 | 0,931888 |
| 1,50 | 0,933193 | 1,51 | 0,934478 | 1,52 | 0,935745 | 1,53 | 0,936992 | 1,54 | 0,938220 |
| 1,55 | 0,939429 | 1,56 | 0,940620 | 1,57 | 0,941792 | 1,58 | 0,942947 | 1,59 | 0,944083 |
| 1,60 | 0,945201 | 1,61 | 0,946301 | 1,62 | 0,947384 | 1,63 | 0,948449 | 1,64 | 0,949497 |
| 1,65 | 0,950529 | 1,66 | 0,951543 | 1,67 | 0,952540 | 1,68 | 0,953521 | 1,69 | 0,954486 |
| 1,70 | 0,955435 | 1,71 | 0,956367 | 1,72 | 0,957284 | 1,73 | 0,958185 | 1,74 | 0,959070 |
| 1,75 | 0,959941 | 1,76 | 0,960796 | 1,77 | 0,961636 | 1,78 | 0,962462 | 1,79 | 0,963273 |
| 1,80 | 0,964070 | 1,81 | 0,964852 | 1,82 | 0,965620 | 1,83 | 0,966375 | 1,84 | 0,967116 |
| 1,85 | 0,967843 | 1,86 | 0,968557 | 1,87 | 0,969258 | 1,88 | 0,969946 | 1,89 | 0,970621 |
| 1,90 | 0,971283 | 1,91 | 0,971933 | 1,92 | 0,972571 | 1,93 | 0,973197 | 1,94 | 0,973810 |
| 1,95 | 0,974412 | 1,96 | 0,975002 | 1,97 | 0,975581 | 1,98 | 0,976148 | 1,99 | 0,976705 |
| 2,00 | 0,977250 | 2,01 | 0,977784 | 2,02 | 0,978308 | 2,03 | 0,978822 | 2,04 | 0,979325 |
| 2,05 | 0,979818 | 2,06 | 0,980301 | 2,07 | 0,980774 | 2,08 | 0,981237 | 2,09 | 0,981691 |
| 2,10 | 0,982136 | 2,11 | 0,982571 | 2,12 | 0,982997 | 2,13 | 0,983414 | 2,14 | 0,983823 |
| 2,15 | 0,984222 | 2,16 | 0,984614 | 2,17 | 0,984997 | 2,18 | 0,985371 | 2,19 | 0,985738 |
| 2,20 | 0,986097 | 2,21 | 0,986447 | 2,22 | 0,986791 | 2,23 | 0,987126 | 2,24 | 0,987455 |
| 2,25 | 0,987776 | 2,26 | 0,988089 | 2,27 | 0,988396 | 2,28 | 0,988696 | 2,29 | 0,988989 |
| 2,30 | 0,989276 | 2,31 | 0,989556 | 2,32 | 0,989830 | 2,33 | 0,990097 | 2,34 | 0,990358 |
| 2,35 | 0,990613 | 2,36 | 0,990863 | 2,37 | 0,991106 | 2,38 | 0,991344 | 2,39 | 0,991576 |
| 2,40 | 0,991802 | 2,41 | 0,992024 | 2,42 | 0,992240 | 2,43 | 0,992451 | 2,44 | 0,992656 |
| 2,45 | 0,992857 | 2,46 | 0,993053 | 2,47 | 0,993244 | 2,48 | 0,993431 | 2,49 | 0,993613 |
| 2,50 | 0,993790 | 2,51 | 0,993963 | 2,52 | 0,994132 | 2,53 | 0,994297 | 2,54 | 0,994457 |
| 2,55 | 0,994614 | 2,56 | 0,994766 | 2,57 | 0,994915 | 2,58 | 0,995060 | 2,59 | 0,995201 |
| 2,60 | 0,995339 | 2,61 | 0,995473 | 2,62 | 0,995604 | 2,63 | 0,995731 | 2,64 | 0,995855 |
| 2,65 | 0,995975 | 2,66 | 0,996093 | 2,67 | 0,996207 | 2,68 | 0,996319 | 2,69 | 0,996427 |
| 2,70 | 0,996533 | 2,71 | 0,996636 | 2,72 | 0,996736 | 2,73 | 0,996833 | 2,74 | 0,996928 |
| 2,75 | 0,997020 | 2,76 | 0,997110 | 2,77 | 0,997197 | 2,78 | 0,997282 | 2,79 | 0,997365 |
| 2,80 | 0,997445 | 2,81 | 0,997523 | 2,82 | 0,997599 | 2,83 | 0,997673 | 2,84 | 0,997744 |
| 2,85 | 0,997814 | 2,86 | 0,997882 | 2,87 | 0,997948 | 2,88 | 0,998012 | 2,89 | 0,998074 |
| 2,90 | 0,998134 | 2,91 | 0,998193 | 2,92 | 0,998250 | 2,93 | 0,998305 | 2,94 | 0,998359 |
| 2,95 | 0,998411 | 2,96 | 0,998462 | 2,97 | 0,998511 | 2,98 | 0,998559 | 2,99 | 0,998605 |
| 3,00 | 0,998650 | 3,01 | 0,998694 | 3,02 | 0,998736 | 3,03 | 0,998777 | 3,04 | 0,998817 |