Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

12. Januar 2004

11. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 21x + 20$?

2) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 21x - 20$?

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\binom{i\ 1}{1\ i}$ ist Hermitesch.

4) *Richtig oder falsch:* Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist ${}^t\!A\overline{A}$ Hermitesch.

5) *Richtig oder falsch:* Falls es zum Eigenwert λ einen Hauptvektor r-ter Stufe gibt, hat λ mindestens die algebraische Vielfachheit r.

6) *Richtig oder falsch:* Zu jedem Eigenwert der algebraischen Vielfachheit r gibt es einen Hauptvektor r-ter Stufe.

7) Die komplexe $n\times n$-Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ mit den algebraischen Vielfachheiten $r_1, \dots, r_s$. Was ist $\det A$?

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -8 \\ -28 & 15 & 14 \\ 16 & 0 & -8 \end{pmatrix}$!

b) Was ist e^A?

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 16x(t) \phantom{{}+15y(t)} - 8z(t), & x(0) &= 1 \\ \dot{y}(t) &= -28x(t) + 15y(t) + 14z(t), & y(0) &= 0 \\ \dot{z}(t) &= 16x(t) \phantom{{}+15y(t)} - 8z(t), & z(0) &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Hauptvektoren zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$!

b) Finden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat!

c) Berechnen Sie die Matrizen A^{100} und e^{At}!

e) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) + z(t), & x(0) &= 1 \\ \dot{y}(t) &= 2x(t) - 4y(t) - 2z(t), & y(0) &= 2 \\ \dot{z}(t) &= 3x(t) - 5y(t) + 2z(t), & z(0) &= 3 \end{aligned}$$

f) Was können Sie über das Langzeitverhalten dieser Lösung sagen?

Abgabe bis zum Montag, dem 19. Januar 2004, um 15.30 Uhr