Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

8. Dezember 2003

9. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Welche Ableitung im Distributionensinne hat die Funktion $f(t) = [t]$, wobei $[t]$ die größte ganze Zahl $s \leq t$ bezeichnet?

2) *ditto* für $f(t) = t - [t]$

3) Die differenzierbare periodische Funktion f habe die Fourier-Reihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_0 k}$. Stellen Sie $\widehat{T_f}$ durch eine Linearkombination F geeigneter δ-„Funktionen“ in der Form T_F dar!

4) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt bis auf Nullfunktionen

$$(f+g) * (f-g) = f * f - g * g\,.$$

5) *Richtig oder falsch:* $\delta * \delta = \delta$

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ t+1 & \text{für } -1 \leq t < 0 \\ t-1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f!

b) Berechnen Sie die Ableitung der Distribution T_f!

c) Geben Sie diese Ableitung, eventuell unter Verwendung von $\delta(t)$, als „Funktion“ an!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Faltung des Rechteckimpulses $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit sich selbst!

b) Was ist die Fourier-Transformierte dieser Faltung?

c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$!

d) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ quadratintegrierbar ist!

e) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4}\, dt$?

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(t) = (N_\sigma * N_\tau)(t) \quad \text{mit} \quad N_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}\,!$$

b) Zeigen Sie, daß $N_\sigma * N_\tau = N_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$ ist!

Abgabe bis zum Montag, dem 15. Dezember 2003, um 15.30 Uhr