WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

10. November 2003

5. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Wenn die FOURIER-Reihe von f für $t = t_0$ das GIBBS-Phänomen zeigt, konvergiert sie dort nicht gegen $f(t_0)$.

2) Die konstante Funktion $f(t) \equiv 1$ ist periodisch mit jeder Periode T. Was ist $1 * 1$ in Abhängigkeit von T?

3) *Richtig oder falsch:* Für jede Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $1 * f = f$.

4) Berechnen Sie $f * g$ für $f(t) = e^{p \cdot i\omega t}$ und $g(t) = e^{q \cdot i\omega t}$ in Abhängigkeit von p und q!

5) *Richtig oder falsch:* Für beliebiges $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $g \in P_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt $f * g$ in $P_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

6) *Richtig oder falsch:* Die Multiplikation aller FOURIER-Koeffizienten mit einer Konstanten c kann auch realisiert werden durch Faltung mit einer Funktion, deren sämtliche komplexe FOURIER-Koeffizienten c_k gleich c sind.

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für $c \le t < c + T$ definiert durch $g(t) = p + \frac{t-c}{T} \cdot (q - p)$ mit $c, p, q \in \mathbb{R}$ und $T > 0$; sie werde periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$ mit Periode T.

a) Skizzieren Sie die Funktion g!

b) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe S_g von g.

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $S_g(t) = g(t)$, und welchen Wert hat $S_g(t)$ sonst?

d) Wo gibt es Überschwingungen (GIBBS-Phänomen)? Welchen Absolutbetrag haben sie?
Hinweis: Wenn Sie mit den aus der Vorlesung bekannten Reihen vergleichen, können Sie diese Aufgabe auch lösen, ohne ein einziges Integral zu berechnen. Sie sollten allerdings die Additionsformel $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ kennen.

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

Für die Funktion g_a sei $g_a(t) = 1/a$ für $|t| < a$ und $g_a(t) = 0$ für alle anderen Punkte im Intervall $[-\pi, \pi]$ für ein festes $a < \pi$; g_a werde periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$ mit Periode 2π.

a) Skizzieren Sie die Funktion g_a!

b) Berechnen Sie für $a < \frac{\pi}{2}$ die Faltung $h_a = g_a * g_a$!

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihen von g_a und h_a!

d) Wohin konvergieren diese FOURIER-Reihen?

e) An welchen Stellen tritt das GIBBS-Phänomen auf, und welchen (ungefähren) Maximalwert erreichen die Teilsummen dort?

f) Wie verhalten sich die FOURIER-Koeffizienten für $a \to 0$?

Abgabe bis zum Montag, dem 17. November 2003, um 15.30 Uhr