Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

13. Oktober 2003

1. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ ist eine holomorphe Funktion.
2) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $z \mapsto z|z|$ ist holomorph.
3) *Richtig oder falsch:* Jede holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist konstant.
4) Finden Sie eine holomorphen Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Re}\, f(x+iy) = u(x,y) = x^2 - y^2$! Ist f eindeutig bestimmt?
5) *Richtig oder falsch:* Die holomorphen Funktionen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der Sinus- und der Cosinusfunktion!

b) Bestimmen Sie die größte Teilmenge $D_1 \subseteq \mathbb{C}$, auf der $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ als holomorphe Funktion erklärt werden kann, und die größte Teilmenge $D_2 \subseteq \mathbb{C}$, auf der $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ als holomorphe Funktion erklärt werden kann!

c) Bestimmen Sie die Ableitungen von Tangens und Cotangens auf D_1 *bzw.* D_2!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Die Funktion $u: D \to \mathbb{R}$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei harmonisch (d.h. $\Delta u \equiv 0$) und mindestens $(m+2)$-fach stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß dann auch jede m-te partielle Ableitung von u harmonisch ist!

b) Für welche $r \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u: \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^r + \cdots + x_n^r \end{cases}$ harmonisch?

c) Für welche $r \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u: \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^r \end{cases}$ harmonisch?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Berechnen Sie für $\gamma: [0,8] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \begin{cases} t - 1 - i & \text{für } 0 \le t \le 2 \\ it + 1 - 3i & \text{für } 2 \le t \le 4 \\ -t + 5 + i & \text{für } 4 \le t \le 6 \\ -it - 1 + 7i & \text{für } 6 \le t \le 8 \end{cases}$ die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_\gamma z\,dz$ *b)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ *c)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$!

Abgabe bis zum Montag, dem 20. Oktober 2003, um 15.30 Uhr