Wie Abbildung 36 zeigt, kann es dabei bei betragsmäßig stark variierenden Funktionswerten zu Problemen kommen: Wie man die Konstante auch wählt, mit der alle Vektoren multipliziert werden, hat man immer entweder einige extrem lange Vektoren oder aber Vektoren, die so kurz sind, daß man nichts mehr erkennen kann: Ab einer gewissen Entfernung vom Zentrum sind die Richtungen des Felds praktisch nicht mehr wahrnehmbar. Eine leichte Verbesserung ergibt sich, wenn man wie in Abbildung 37 die Vektoren „flächig“ zeichnet, wobei die Länge des Vektors proportional zur *Fläche* des eingezeichneten Pfeils ist, aber auch das hilft nicht sehr viel.

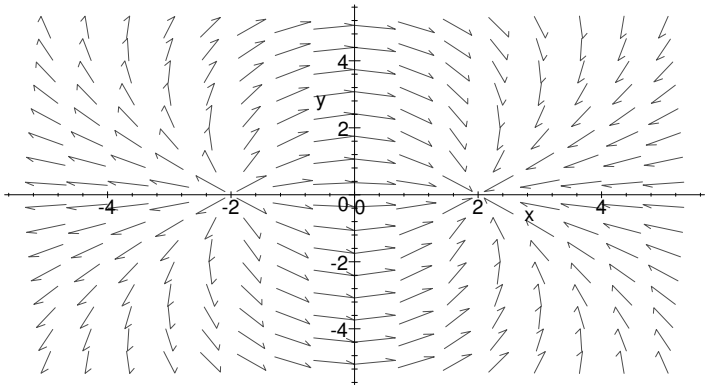

Abb. 38: Das Richtungfeld zum obigen Feld

Da gerade die Richtung sehr wesentlich für die Konstruktion von Feldlinien ist, begnügt man sich oft damit, nur die Richtungen darzustellen, ansonsten aber sämtlichen Vektoren dieselbe Länge zu geben; siehe dazu etwa Abbildung 38. Dadurch geht zwar ein Teil der Information verloren, aber das entsprechende Bild kann trotzdem oft mehr aussagen, als eines, bei dem fast alle Pfeile visuell zu Punkten degeneriert sind. Auch bei der Darstellung als Richtungsfeld müssen allerdings natürlich alle Punkte $\boldsymbol{x}$, für die $f(\boldsymbol{x}) = (0, \ldots, 0)$ ist, durch Punkte oder überhaupt nicht dargestellt werden, denn dort gibt es keine Richtung.

a) Der Begriff des Vektorfelds

Nicht nur zur Veranschaulichung kann es nützlich sein, die Werte einer Funktion als Vektoren zu betrachten: Die für uns wichtigsten Beispiele von Funktionen mehrerer Veränderlicher, deren Wert nicht in $\mathbb{R}$ sondern in einem $\mathbb{R}^n$ liegt, sind die aus der Physik bekannten Felder wie etwa ein Kraftfeld, ein elektrisches Feld oder ein Magnetfeld. Da solche Felder typischerweise als Vektoren geschrieben werden, schreiben wir deshalb in diesem Paragraphen die *Funktionswerte* vektoriell, wohingegen die Argumente weiterhin Punkte sind, die als Tupel geschrieben werden. Wir betrachten somit Funktionen

$$\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^m; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \vec{V}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} V_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ V_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix},$$

wobei die Komponentenfunktionen $V_i\colon D \to \mathbb{R}$ genau die im vorigen Paragraphen betrachteten skalarwertigen Funktionen mehrerers Veränderlicher sind.

Der mathematische Begriff, der physikalische Felder beschreibt, ist der des Vektorfelds:

Definition: Ein Vektorfeld auf der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^n$.

(Da die typischen elektromagnetischen Felder wie $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ oder auch das Kraftfeld $\vec{F}$ üblicherweise durch Großbuchstaben bezeichnet werden, verwenden wir auch für Vektorfelder meist Großbuchstaben wie $\vec{V}$ oder $\vec{W}$.)

b) Die Jacobi-Matrix

Wir werden uns in diesem Paragraphen zwar hauptsächlich mit Vektorfeldern im $\mathbb{R}^n$ beschäftigen, und uns selbst da teilweise auf den Fall $n = 3$ beschränken; zumindest die grundlegenden Definitionen sollen aber für beliebige Funktionen auf einer Teilmenge D von $\mathbb{R}^n$ mit Werten in irgendeinem $\mathbb{R}^m$ betrachtet werden.

Fast von selbst versteht sich die

Definition: Eine Funktion $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt stetig *bzw.* differenzierbar, wenn alle Komponentenfunktionen f_i stetig *bzw.* differenzierbar sind. Entsprechend definieren wir auch die Menge $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$ aller k-fach stetig differenzierbarer Funktionen von D nach $\mathbb{R}^m$ als Menge aller Funktionen, deren Komponenten $f_i \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$ k-mal stetig differenzierbar sind.

Wie bei skalarwertigen Funktionen überlegt sich leicht, daß $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Damit wissen wir also, was Differenzierbarkeit einer Funktion $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ bedeutet; was aber ist ihre Ableitung?

Bei skalarwertigen Funktionen einer oder mehrerer Veränderlicher hatten wir die Ableitung jeweils als Linearisierung der Funktion in der Umgebung des betrachteten Punkts definiert; genauso gehen wir auch hier vor: Für jede der Komponentenfunktion f_i ist

$$f_i(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = f_i(\boldsymbol{x}) + \operatorname{grad} f_i(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big) \,,$$

wobei der Punkt hier für das Skalarprodukt von Vektoren steht. Im Hinblick auf vektorwertige Funktionen ist es aber besser, anstelle des Skalarprodukt ein Matrixprodukt zu verwenden; dazu müssen wir den Gradienten als Zeilenvektor schreiben, d.h. wenn $\cdot$ das Matrixprodukt bezeichnet, ist

$$f_i(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = f_i(\boldsymbol{x}) + {}^t\operatorname{grad} f_i(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big) \,.$$

In dieser Notation können wir die als Zeilenvektoren aufgefaßten Gradienten zu einer $n \times n$-Matrix zusammenfassen, der JACOBI-Matrix

$$J_{\vec{f}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} {}^t\operatorname{grad} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ {}^t\operatorname{grad} f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \,.$$

Mit dieser Matrix ist dann

$$\vec{f}(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = \vec{f}(\boldsymbol{x}) + J_{\vec{f}}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big) \,,$$

wobei hier das Produkt als Matrixprodukt zu verstehen wird und das Symbol $o\big(|\vec{h}|\big)$ schlampigerweise auch für einen Vektor benutzt wird, dessen sämtliche Komponenten $o\big(|\vec{h}|\big)$ sind.

c) Die Divergenz eines Vektorfelds

Die JACOBI-Matrix eines Vektorfelds hängt stark ab vom gewählten Koordinatensystem. Wir wollen aus dieser Matrix Größen ableiten, von denen wir später sehen werden, daß sie *intrinsische,* d.h. also vom Koordinatensystem unabhängige Eigenschaften des Vektorfelds beschreiben.

Definition: *a)* Die *Spur* einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist die Summe

$$\operatorname{Spur} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

der Diagonalelemente von A.
b) Die Spur der JACOBI-Matrix $J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x})$ eines Vektorfelds heißt *Divergenz* oder *Quellendichte* von $\vec{V}$:

$$\operatorname{div} \vec{V}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{Spur} J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x}) \,.$$

Um ein anschauliches Verständnis von der Divergenz zu bekommen, betrachten wir den (sehr speziellen) Fall, daß die JACOBI-Matrix von $\vec{V}$ eine Diagonalmatrix ist:

$$J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dann ist für jeden Einheitsvektor $\vec{e}_i$

$$\vec{V}(\boldsymbol{x} + h\vec{e}_i) = \vec{V}(\boldsymbol{x}) + h \cdot J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x})\vec{e}_i + o(h) = \vec{V}(\boldsymbol{x}) + h\lambda_i\vec{e}_i + o(h) \,,$$

und für einen beliebigen Vektor $\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + \cdots + h_n\vec{e}_n$ ist

$$\vec{V}(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = \vec{V}(\boldsymbol{x}) + J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x})\vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big) = \vec{V}(\boldsymbol{x}) + \begin{pmatrix} \lambda_1 h_1 \\ \vdots \\ \lambda_n h_n \end{pmatrix} + o\big(|\vec{h}|\big) \,.$$

Falls alle λ_i positiv sind, hat hier jede Komponente des Vektors $\vec{V}(\boldsymbol{x}) + J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x})\vec{h}$ dasselbe Vorzeichen wie die entsprechende Komponente von $\vec{h}$; entfernt man sich also vom Punkt $\boldsymbol{x}$, so zeigt auch die Veränderung des Vektorfelds $\vec{V}$ weg vom Punkt x und umgekehrt; die Situation

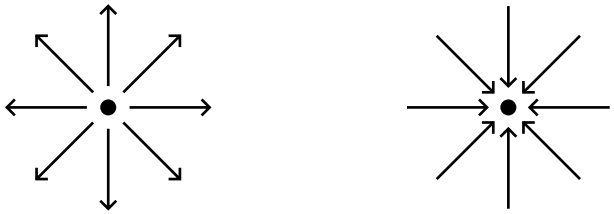

Abb. 39: Quellen und Senken

ist also ungefähr so wie auf der linken Seite von Abbildung 39. Man bezeichnet $\boldsymbol{x}$ in einem solchen Fall als eine *Quelle* des Vektorfelds $\vec{V}$.

Falls alle λ_i negativ sind, gehen die Änderungen jeweils in Gegenrichtung, es sieht also ungefähr so aus wie im rechten Teil von Abbildung 39, und man spricht von einer *Senke.*

Im allgemeinen werden allerdings weder *alle* λ_i positiv noch *alle* λ_i negativ sein; die Divergenz als Summe der λ_i sagt uns dann, ob sich der Punkt eher wie eine Quelle oder eher wie eine Senke verhält.

Nun wird es natürlich nur selten vorkommen, daß die JACOBI-Matrix eine Diagonalmatrix ist; wie wir am Ende dieses Kapitels sehen werden, ist die Divergenz trotzdem auch im allgemeinen Fall eine Maßzahl dafür, ob ein Punkt Quelle oder Senke ist, und zwar in einer viel präziseren Weise, als es die obige Diskussion für Diagonalmatrizen zeigte.

Im übrigen sind Diagonalmatrizen doch nicht so speziell, wie es zunächst den Anschein hat: Im nächsten Semester werden wir sehen, daß es zu jeder symmetrischen Matrix ein Koordinatensystem gibt, bezüglich dessen die durch die Matrix definierte lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ eine Diagonalmatrix als Abbildungsmatrix hat; zumindest für den symmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix ist die obige Diskussion also richtig. Mit dem antisymmetrischen Anteil beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt.

In diesem Abschnitt wollen wir uns nur noch überlegen, wie man die Divergenz eines Vektorfelds tatsächlich ausrechnet. Die Divergenz ist

nach Definition gleich der Spur der JACOBI-Matrix, also ist

$$\operatorname{div}\vec{V} = \operatorname{Spur} J_{\vec{V}}(x) = \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_n}{\partial x_1} & \frac{\partial V_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial V_n}{x_n}\,.$$

Genauso wie wir den Gradienten einer skalarwertigen Funktion f auch als ∇f schreiben, schreiben wir die Divergenz eines Vektorfelds $\vec{V}$ auch als $\nabla\vec{V}$. Beides kann formal auch als Produkt *bzw.* Skalarprodukt mit einem vektorwertigen Operator interpretiert werden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}\,.$$

Diese Interpretation darf allerdings nicht *zu* ernst genommen werden, denn obwohl Skalarprodukt und Produkt mit einem Skalar beide kommutativ sind, ist weder die Gleichung $\nabla\vec{V} = \vec{V}\nabla$ noch die Gleichung $\nabla f = f\nabla$ auch nur annähernd sinnvoll, geschweige denn richtig.

d) Die Rotation eines dreidimensionalen Vektorfelds

Erinnern wir uns zunächst an symmetrische und antisymmetrische Matrizen: Eine Matrix ist *symmetrisch,* wenn $a_{ij} = a_{ji}$ ist für alle Indexpaare (i, j); sie ist *antisymmetrisch* im Falle $a_{ij} = -a_{ji}$. Jede reelle Matrix A kann als Summe einer symmetrischen Matrix S und einer

antisymmetrischen Matrix T geschrieben werden; die Einträge von S und T sind jeweils

$$\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{a_{ij}-a_{ji}}{2}\,.$$

Für $n = 1$ ist jede $n \times n$-„Matrix“ symmetrisch, es gibt als keinen antisymmetrischen Anteil.

Für $n = 2$ hat jede antisymmetrische Matrix A die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

für den antisymmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix ist

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right).$$

Damit ist der antisymmetrische Anteil durch diese eine Zahl bestimmt.

Für $n > 3$ gibt es keine einfachere Darstellung des antisymmetrischen Anteils als die schiefsymmetrische Matrix selbst, bleibt also noch der für viele Anwendungen besonders wichtige Fall $n = 3$.

Eine antisymmetrische 3×3-Matrix A hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Für einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ist daher

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y + \beta z \\ -\alpha x + \gamma z \\ -\beta x - \gamma y \end{pmatrix}.$$

Diese spezielle Form des Matrix-Vektor-Produkts sollte Erinnerungen an das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ wecken:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Somit entspricht im Dreidimensionalen die Multiplikation mit einer schiefsymmetrischen Matrix genau dem Vektorprodukt (das im übrigen auch nur im Dreidimensionalen definierbar ist).

Der Vektor $\vec{a}$ läßt sich im vorliegenden Fall leicht ausrechnen: Die JACOBI-Matrix

$$J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} & \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} & \frac{\partial V_3}{\partial y} & \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

eines dreidimensionalen Vektorfelds $\vec{V}$ hat antisymmetrischen Anteil

$$A = \frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial y} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial z} & \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} & 0 \end{pmatrix},$$

und wie wir uns gerade überlegt haben, ist für jeden Vektor $\vec{v}$

$$A\vec{v} = \vec{a} \times \vec{v} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Da der Faktor $\frac{1}{2}$ in konkreten Rechnungen nur hinderlich wäre, betrachten wir den Vektor $2\vec{a}$ und definieren:

Definition: $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^3$ sei ein Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann bezeichnen wir das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} V\colon D \to \mathbb{R}^3; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

als Rotation von $\vec{V}$.

Für ein Vektorfeld $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^3)$, dessen JACOBI-Matrix symmetrischen Anteil S hat, ist also

$$\vec{V}(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = \vec{V}(\boldsymbol{x}) + S\vec{h} + \tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\vec{V}) \times \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big) \ .$$

Der Name *Rotation* wird im folgenden (etwas umfangreichen) Beispiel verständlich: Wir gehen aus vom Vektor

$$\vec{a} = 2 \operatorname{rot} \vec{V}(\boldsymbol{x}) \ .$$

Nach Definition des Vektorprodukts steht $\vec{a} \times \vec{h}$ senkrecht sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{h}$. Bedenkt man noch, daß Vektoren Äquivalenzklassen von Pfeilen sind, die man sich nicht unbedingt so vorstellen muß, daß sie alle im selben Punkt beginnen, bietet sich folgende Interpretation an: Wenn wir den Vektor $\vec{h}$ um die von $\vec{a}$ aufgespannte Achse drehen, zeigt $\vec{a} \times \vec{h}$ in Richtung der Tangente der Bahn des Endpunkts von $\vec{h}$. (Damit dies stimmt, muß die Achse so orientiert werden, daß sich $\vec{h}$ im mathematisch positiven, d.h. Gegenuhrzeigersinn, um $\vec{a}$ dreht. Von der Ebene der Uhr aus gesehen zeigt dann $\vec{a}$ nach oben, $\vec{h}$ zu dem sich drehenden Punkt, und $\vec{a} \times \vec{h}$ in Richtung des Gegenuhrzeigersinns, wie man sich z.B. mit der Dreifingerregel leicht veranschaulicht.)

Der antisymmetrische Anteil der JACOBI-Matrix sollte also etwas mit einer Drehbewegung zu tun habe, genauer gesagt mit deren Geschwindigkeitsvektor, denn dieser zeigt in Richtung der Tangente der Bahnkurve.

Um dies genauer zu untersuchen, betrachten wir zunächst eine einfache Drehung eines Vektors um die z-Achse mit Drehwinkel φ. Diese ist aufgrund der Definition von Sinus und Cosinus ausdrückbar durch die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} x &\mapsto x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y &\mapsto x\sin\varphi + y\cos\varphi \ . \\ z &\mapsto z \end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir einen Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ um eine beliebige Achse drehen; der Drehwinkel sei weiterhin φ. Dazu sei $\vec{a}$ der Einheitsvektor in Richtung der Achse; er sei so orientiert, daß der Drehsinn (bei positivem Winkel φ) gleich dem Gegenuhrzeigersinn ist. Dann gelten in den auf $\vec{a}$ senkrecht stehenden Ebenen im wesentlichen dieselbe Formeln, falls wir nur die Koordinateneinheitsvektoren der x- und der y-Achse ersetzen durch zwei aufeinander und auf $\vec{a}$ senkrecht stehende gleichlange Vektoren. Als ein solcher Vektor bietet sich der Verbindungsvektor $\vec{r}$ von der Achse zum Punkt $\boldsymbol{x}$ an, d.h. jener Vektor, der den Abstand zwischen $\boldsymbol{x}$ und der Achse beschreibt. Ein sowohl auf $\vec{r}$ als auch auf $\vec{a}$ senkrecht stehender Vektor ist $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{r}$; da $\vec{a}$ die Länge eins hat, ist $\vec{s}$ genauso lang wie $\vec{r}$.

In der von $\vec{r}$ und $\vec{s}$ aufgespannten Ebene bildet die Drehung um den Winkel φ somit den Vektor $\alpha\vec{r} + \beta\vec{s}$ ab auf

$$(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)\,\vec{r} + (\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)\,\vec{s} \ .$$

Nun zerlegen wir den Ortsvektor $\vec{x}$ eines Punktes $\boldsymbol{x}$ in einen Vektor $\vec{x}_a$ auf der Achse und den radialen, d.h. senkrecht auf der Achse stehenden, Anteil $\vec{r}$.

$\vec{x}_a$ ist die Projektion von $\vec{x}$ auf die Drehachse; da wir $\vec{a}$ als Einheitsvektor vorausgesetzt haben, ist dies nach den allgemeinen Regeln der Vektorrechnung einfach

$$\vec{x}_a = (\vec{a} \cdot \vec{x})\,\vec{a} \ ,$$

denn die Länge des Vektors wird bei der Projektion mit dem Cosinus des Winkels zur Achse multipliziert, und die Richtung des auf die Achse projezierten Vektors ist natürlich gleich der Richtung der Achse.

Damit läßt sich auch die radiale Komponente problemlos berechnen: Da beide Komponenten zusammen den Vektor $\vec{x}$ ergeben müssen, ist

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_a = \vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x})\,\vec{a} \ .$$

Nun ist $\vec{x}_a$ parallel zu $\vec{a}$, und das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren verschwindet. Deshalb können wir auch schreiben

$$\vec{s} = \vec{a} \times \vec{r} = \vec{a} \times \Big(\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{a}\Big) = \vec{a} \times \vec{x} \ .$$

Da die Axialkomponente eines Vektors bei Drehungen erhalten bleibt, wird speziell der Vektor $\vec{x} = \vec{x}_a + \vec{r}$ also abgebildet auf

$$\begin{aligned} &\vec{x}_a + \cos\varphi\ \vec{r} + \sin\varphi\ \vec{s} \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \cos\varphi\ \Big(\boldsymbol{x} - (\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{a}\Big) + \sin\varphi\ \vec{a} \times \vec{x} \\ &= (1 - \cos\varphi)(\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \cos\varphi\ \vec{x} + \sin\varphi\ \vec{a} \times \vec{x} \ . \end{aligned}$$

Um den Geschwindigkeitsvektor einer Drehung auszurechnen, müssen wir diese zunächst zu einem dynamischen Prozeß machen, d.h. anstelle einer Drehung mit konstantem Drehwinkel φ betrachten wir eine Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω. Wir gehen wieder aus von einem festen Punkt $\boldsymbol{x}$ und betrachten dessen Position zum Zeitpunkt t, d.h. wir betrachten die Funktion

$$\vec{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto (1 - \cos\omega t)(\vec{x} \cdot \vec{a})\ \vec{a} + \cos\omega t\ \vec{x} + \sin\omega t\ \vec{a} \times \vec{x} \ . \end{cases}$$

Der Geschwindigkeitsvektor im Punkt $\boldsymbol{x}$ ist die Ableitung dieser Funktion im Nullpunkt, also der Vektor

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(0) = \Big(\omega\sin\omega t\ (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{a} - \omega\sin\omega t\ \vec{x} + \omega\cos\omega t\ \vec{a} \times \vec{x}\Big)_{|t=0} = \omega\vec{a} \times \vec{x} \ .$$

Mit anderen Worten: Bei der Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω um die von $\vec{a}$ aufgespannte Achse ist der Geschwindigkeitsvektor im Punkt $\boldsymbol{x}$ gleich $\omega\vec{a} \times \vec{x}$.

Der Vektor $\omega\vec{a}$ läßt sich auffassen als eine vektorielle Winkelgeschwindigkeit (die in der Physik in der Tat genau so definiert wird), und für einen beliebigen Vektor $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorfeld

$$\vec{V}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \vec{\omega} \times \vec{x}$$

das Feld der Geschwindigkeitsvektoren zu einer Rotation mit vektorieller Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß $\operatorname{rot}\vec{V}$ in der englischsprachigen Literatur meist als $\operatorname{curl}\vec{V}$ geschrieben wird nach dem englischen Wort *curl* = Locke.

Wie Gradient und Divergenz können wir auch die Rotation formal mit Hilfe des Operators ∇ ausdrücken: Für ein dreidimensionales Vektorfeld $\vec{V}$ ist

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot}\vec{V} \,.$$

e) Erste Beispiele

Zum besseren Verständnis von Divergenz und Rotation und um den Umgang mit den beiden Begriffen zu üben, wollen wir sie für zwei einfache Felder ausrechnen: Für das elektrische Feld einer Punktladung und für das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters.

1) Das elektrische Feld einer Punktladung: Eine Punktladung q im Nullpunkt erzeugt nach dem COULOMBschen Gesetz ein elektrisches Feld $\vec{E}$ der Stärke

$$\vec{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{x}}{\left|\vec{x}\right|^3} \,,$$

denn die Feldstärke nimmt mit der Entfernung vom Nullpunkt quadratisch ab und hat die Richtung (oder – je nach Vorzeichen von q – auch Gegenrichtung) des Ortsvektors., d.h. der Einheitsvektor der Richtung ist $\pm\vec{x}/\left|\vec{x}\right|$, und er muß noch durch $\left|\vec{x}\right|^2$ dividiert werden.

Das Feld $\vec{E}$ ist nur definiert auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$; im Nullpunkt haben wir einen Nenner Null, und auch physikalisch ist es nicht sinnvoll, nach dem Feld *im Innern* einer Punktladung zu fragen: Punktladungen sind nun einmal mathematische Idealisierungen, und wirklich anwendbar ist das COULOMBsche Gesetz ohnehin erst ab einem gewissen Mindestabstand: Bei zu kleinen Abständen spielen andere Wechselwirkungen eine wesentlich größere Rolle.

In Koordinaten ist also

$$\vec{E}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} E_1(\boldsymbol{x}) \\ E_2(\boldsymbol{x}) \\ E_3(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left\|\vec{x}\right\|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,.$$

Zur Berechnung der Divergenz müssen wir die erste Komponente nach x, die zweite nach y und die dritte nach z ableiten und dann die drei Ableitungen addieren. Beachten wir, daß

$$\left\|\vec{x}\right\|^3 = (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$$

ist, folgt sofort aus der Quotientenregel, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x}(\boldsymbol{x}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\left\|\vec{x}\right\|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left\|\vec{x}\right\|^3 - x\cdot\frac{3}{2}\cdot 2x\left\|\vec{x}\right\|}{\left\|\vec{x}\right\|^6} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left\|\vec{x}\right\|^2 - 3x^2}{\left\|\vec{x}\right\|^5} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left\|\vec{x}\right\|^5}(-2x^2+y^2+z^2) \,. \end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$\frac{\partial E_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left\|\vec{x}\right\|^5}(x^2-2y^2+z^2)$$

und

$$\frac{\partial E_3}{\partial z}(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left\|\vec{x}\right\|^5}(x^2+y^2-2z^2) \,,$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E}(\boldsymbol{x}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left\|\vec{x}\right\|^5}(-2x^2+y^2+z^2+x^2-2y^2+z^2+x^2+y^2-2z^2) \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Rotation benötigen wir die Einträge der JACOBI-Matrix, die nicht in der Diagonale stehen; dabei werden die Komponenten von $\vec{E}$ nach jenen Variablen abgeleitet, die *nicht* im Zähler stehen. Die Situation ist also stets dieselbe, und es genügt, wenn wir beispielsweise die Ableitung von E_1 nach y ausrechnen.

Aus den üblichen Ableitungsregeln folgt sofort, daß

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x\cdot 2y}{\|\vec{x}\|^5} = -\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xy}{\|\vec{x}\|^5}$$

ist, und analog ist auch

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{y\cdot 2x}{\|\vec{x}\|^5} = -\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xy}{\|\vec{x}\|^5}\,.$$

Die x-Komponente von rot $\vec{E}$ ist somit

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = 0\,,$$

und genauso überzeugt man sich auch vom Verschwinden der anderen Komponenten.

Somit ist also das Feld einer Punktladung außerhalb des Punktes selbst sowohl quellen- als auch wirbelfrei, genau wie es nach den MAXWELLschen Gleichungen auch sein muß.

2) Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters: Das Magnetfeld eines von einem Strom der Stärke I durchflossenen geradlinigen Drahts ist nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz

$$\vec{H}(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{4\pi\|\vec{r}\|^2}\,\vec{a}\times\vec{x}\,,$$

wobei $\vec{a}$ der Einheitsvektor in Richtung des Stroms und $\vec{r}$ der Abstandsvektor zwischen dem Draht und dem Punkt $\vec{x}$ ist. $\vec{H}$ ist überall im $\mathbb{R}^3$ erklärt, außer auf der von $\vec{a}$ aufgespannten Geraden, wo $\vec{r}$ der Nullvektor ist.

Zum einfacherer Rechnen wählen wir das Koordinatensystem so, daß $\vec{a}$ der Einheitsvektor in Richtung der positiven z-Achse ist; für den Punkt mit Koordinaten (x, y, z) ist dann

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \vec{a}\times\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\,,$$

d.h.

$$\vec{H}(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\,.$$

Dieses Vektorfeld ist erklärt auf $\mathbb{R}^3$ minus der z-Achse; auf der z-Achse, d.h. im Innern des Leiters, bekommen wir eine Null in den Nenner.

Die drei Komponenten dieses Felds könnten wir nun wie oben nach den drei Variablen x, y, z ableiten, um so Rotation und Divergenz zu berechnen; es gibt allerdings eine einfachere Möglichkeit, die JACOBI-Matrix eines solchen Felds zu bestimmen:

Wie auch das $\vec{E}$-Feld im obigen Beispiel läßt sich $\vec{H}$ schreiben als Produkt einer skalaren Funktion mit einer *linearen* Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Solche Funktionen, bei denen alle Nichtlinearität in einer skalaren Funktion steckt, bezeichnen wir als *quasilinear:*

Definition: Eine Funktion $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *quasilinear,* wenn es eine Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gibt, so daß $\vec{f}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})\cdot A\vec{x}$ ist.

In diesem Sinne ist $\vec{H}(x)$ quasilinear mit

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)} \quad\text{und}\quad A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

und das obige Feld $\vec{E}$ ist quasilinear mit

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}\|^3} \quad\text{und}\quad A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

Lemma: Für eine quasilineare Funktion $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$J_{\vec{f}}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})\cdot A + (A\vec{x})\cdot {}^t\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x})\big)\,.$$

In dieser Formel steht der erste Malpunkt für die Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix, der zweite für das Matrixmultiplikation des

Spaltenvektors $A\vec{x}$ mit dem zum *Zeilenvektor* transponierten Gradienten. Es geht hier also nicht um ein Skalarprodukt, sondern um eine Matrixmultiplikation, deren Ergebnis eine $n \times m$-Matrix ist.

Ausgeschrieben wird die Formel zu

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot a_{ij} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} .$$

Zum *Beweis* leiten wir $f_i(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu$ nach x_j ab; nach der Produktregel ist, wie gewünscht,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) &= \varphi(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu \\ &= \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot a_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu . \end{aligned}$$

∎

Dieses Lemma wenden wir gleich an auf das Feld $\vec{H}(\boldsymbol{x})$; hier ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = \frac{-2x \cdot I}{4\pi(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = \frac{-2y \cdot I}{4\pi(x^2+y^2)^2} ,$$

d.h.

$$\operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{-2I}{4\pi(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} J_{\vec{H}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{-2I}{4\pi(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)^2} \left(\begin{pmatrix} 0 & -x^2-y^2 & 0 \\ x^2+y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x & -2y & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)^2} \left(\begin{pmatrix} 0 & -x^2-y^2 & 0 \\ x^2+y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 2xy & 2y^2 & 0 \\ -2x^2 & -2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 2xy & y^2-x^2 & 0 \\ y^2-x^2 & -2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Diese Matrix ist symmetrisch und hat Spur Null, d.h auch hier ist

$$\operatorname{div} \vec{H}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{H}(\boldsymbol{x}) = \vec{0} ,$$

und auch dies natürlich wieder in Übereinstimmung mit den MAXWELL-schen Gleichungen.

Da die Feldlinien des hier betrachteten Felds Kreise sind, mag es auf den ersten Blick seltsam erscheinen, daß die Rotation von $\vec{H}$ verschwindet. Der Grund liegt darin, daß alle Kreise ihren Mittelpunkt auf der z-Achse haben, die wir in der obigen Rechnung ausschließen mußten: Die Rotation in einem Punkt $\boldsymbol{x}$ mißt die Rotation um $\boldsymbol{x}$, und beim betrachteten Feld rotiert eben alles um die z-Achse, so daß die Rotation überall sonst verschwindet.

f) Allgemeine Rechenregeln

Nachdem wir gerade mit relativ großem Aufwand für zwei Beispiele Divergenz und Rotation berechnet haben, wollen wir nun einige Rechenregeln herleiten, die uns unter anderem zeigen werden, daß zumindest ein Teil der obigen Rechnungen hätte vermieden werden können.

Wir wollen uns als nächstes überlegen, was passiert, wenn wir zwei der drei Operatoren grad, div und rot hintereinanderausführen – sofern dies möglich ist.

Der Gradient einer skalaren Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld; es ist also möglich, dessen Divergenz und Rotation zu berechnen. Um keine Probleme mit der Existenz und der Reihenfolge von Ableitungen zu haben, setzen wir voraus, daß f in $\mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ liegt; dann ist

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\,.$$

Die rechte Seite schreiben wir auch kurz als

$$\Delta f \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

und bezeichnen

$$\Delta \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

als LAPLACE-Operator.

(Der LAPLACE-Operator ist älter als Divergenz, Gradient, Rotation und so weiter; er spielt eine große Rolle sowohl bei Wellen als auch bei Potentialfeldern. HAMILTON wählte das Zeichen ∇ in Anlehnung an diesen Operator; formal kann man $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ schreiben.)

Auch die Rotation eines Gradientenfelds läßt sich leicht berechnen, allerdings natürlich nur im $\mathbb{R}^3$, da wir für andere Dimensionen keine

Rotation definiert haben.

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}\,.$$

Die Rotation eines stetig differenzierbaren Gradientenfelds ist also stets Null; da das elektrische Feld der negative Gradient des elektrischen Potentials ist, hätten wir oben also für

$$\vec{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}}{\left\|\vec{x}\right\|^3} = -\operatorname{grad}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\left\|\vec{x}\right\|}$$

auf die Berechnung der Rotation verzichten können.

Die Divergenz eines Vektorfelds ist eine skalare Funktion; der einzige Operator, der darauf angewandt werden kann, ist daher der Gradient, und das Ergebnis ist völlig uninteressant: siehe Frage *5)* auf dem zehnten Übungsblatt.

Die Rotation eines Vektorfelds im Dreidimensionalen schließlich ist wieder ein Vektorfeld, wir können also Divergenz und Rotation davon berechnen:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} &= \operatorname{div}\begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 V_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial z \partial y} = 0\end{aligned}$$

für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Da ein Magnetfeld als Rotation eines Vektorpotentials geschrieben werden kann, erklärt dies, warum im obigen Beispiel $\operatorname{div}\vec{H} = 0$ war.

Bleibt noch die Rotation der Rotation; für diese ist nach Aufgabe 2 des zehnten Übungsblatts

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} - \begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix}\,.$$

Ebenfalls dort sind auch die beiden „Produktregeln“

$$\operatorname{div}(f\vec{V}) = f \operatorname{div}\vec{V} + (\operatorname{grad} f)\cdot\vec{V}$$

und

$$\operatorname{rot}(f\vec{V}) = f \operatorname{rot}\vec{V} + (\operatorname{grad} f)\times\vec{V}$$

zu finden. Mit dem Operator ∇ geschrieben werden sie völlig analog zur klassischen LEIBNIZ-Regel:

$$\nabla\cdot(f\vec{V}) = f\nabla\cdot\vec{V} + \nabla f\cdot\vec{V}$$

und

$$\nabla\times(f\vec{V}) = f\nabla\times\vec{V} + \nabla f\times\vec{V}$$

Speziell für ein lineares Vektorfeld

$$\vec{V}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n;\quad \boldsymbol{x}\mapsto A\vec{x}\quad\text{mit}\quad A\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

ist

$$\operatorname{div}\vec{V} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{Spur} A$$

und, im Falle $n = 3$,

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{pmatrix} a_{32}-a_{23}\\ a_{13}-a_{31}\\ a_{21}-a_{12}\end{pmatrix};$$

für eine quasilineare Funktion $\vec{f}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})A\vec{x}$ ist also nach den beiden Produktregeln

$$\operatorname{div}\vec{f} = \varphi\operatorname{Spur} A + (\operatorname{grad}\varphi)\cdot A\vec{x}$$

und

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \varphi\cdot\begin{pmatrix} a_{32}-a_{23}\\ a_{13}-a_{31}\\ a_{21}-a_{12}\end{pmatrix} + (\operatorname{grad}\varphi)\times A\vec{x},$$

was uns in den Beispielen des vorigen Abschnitts manche Rechnung erspart hätte.

g) Nichtkartesische Koordinatensysteme

Auch in diesem letzten Abschnitt von §2 soll es um Möglichkeiten gehen, wie wir bei diesen (und anderen) Beispielen effizienter rechnen können. Das Feld einer Punktladung beispielsweise ist kugelsymmetrisch, jedoch haben wir bei der Berechnung von Divergenz und Rotation dieses Feldes die Kugelsymmetrie mutwillig zerstört, indem wir in einem kartesischen Koordinatensystem rechneten. Hier soll es nun um Koordinatensysteme gehen, die einer solchen Symmetrie angepaßt sind.

1) Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$***:*** Aus der Analysis I oder vielleicht auch aus der Schule kennen wohl viele die Parametrisierung der Ebene durch Polarkoordinaten: Ein Punkt $P\in\mathbb{R}^2$ wird charakterisiert durch seien Abstand r vom Nullpunkt O sowie den Winkel φ zwischen dem Vektor $\vec{OP}$ und dem Einheitsvektor der (positiven) x-Achse, wobei letzterer für $P = O$ nicht definiert ist.

Für einen Punkt mit kartesischen Koordinaten (x, y) ist daher

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

und für $(x, y)\neq(0, 0)$ ist φ so bestimmt, daß gilt

$$x = r\cos\varphi\quad\text{und}\quad y = r\sin\varphi\,.$$

φ ist dabei, wie üblich, natürlich nur modulo 2π bestimmt.

Anstelle des Gitternetzes eines kartesischen Koordinatensystems hat man bei den Poalrkoordinaten ein Netz aus Kreisen um den Nullpunkt, auf denen der Radius r konstant ist, und aus vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen, auf denen φ konstant ist.

Für eine Funktion $f(x, y)$ auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ können wir die Polarkoordinatendarstellung

$$F(r,\varphi) \underset{\text{def}}{=} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

betrachten; wir wollen sehen, wie man mit F allein immer noch den Gradienten oder beispielsweise auch die LAPLACEsche Δf berechnen kann.

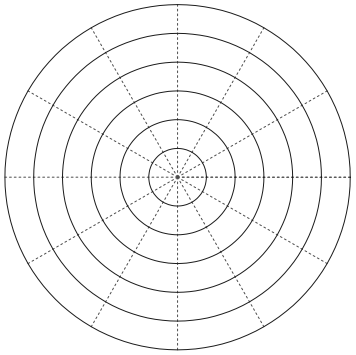

Abb. 40: Das Netz der Polarkoordinaten

Dazu müssen wir zunächst die partiellen Ableitungen von f nach x und y durch die von F nach r und φ ausdrücken. Dies ist auf direkte Weise etwas schwierig, da wir keine gute Formel für die Berechnung von φ aus x und y haben. Die umgekehrte Aufgabe dagegen ist umso einfacher: Nach der Kettenregel ist

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = -\frac{\partial f}{\partial x} r\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\varphi\,.$$

Da $r > 0$ ist, können wir dies auch in der Form

$$\begin{aligned} F_r &= f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi \\ \frac{F_\varphi}{r} &= -f_x\sin\varphi + f_y\cos\varphi \end{aligned}$$

schreiben. Dies ist ein lineares Gleichungssystem für f_x und f_y; wenn wir von der mit $\cos\varphi$ multiplizierten ersten Gleichung die mit $\sin\varphi$ multiplizierte zweite subtrahieren, erhalten wir

$$f_x = F_r\cos\varphi - \frac{F_\varphi}{r}\sin\varphi\,;$$

entsprechend erhalten wir

$$f_y = F_r\sin\varphi + \frac{F_\varphi}{r}\cos\varphi\,,$$

wenn wir die mit $\sin\varphi$ multiplizierte erste Gleichung zur mit $\cos\varphi$ multiplizierten zweiten addieren.

Entsprechend können wir auch die zweiten partiellen Ableitungen von f durch partielle Ableitungen von F ausdrücken, allerdings werden hier die Ausdrücke schon deutlich komplexer, so daß hier auf die detailierte Rechnung verzichtet sei. Wichtig ist vor allem der LAPLACE-Operator, und wenn es auch sehr umständlich wäre, dessen Darstellung in Polarkoordinaten *herzuleiten* können wir die fertige Formel

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = F_{rr} + \frac{F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2}\,,$$

doch leicht und relativ schnell beweisen kann, indem wir

$$F_{rr} = \big(f_{xx}\cos\varphi + f_{xy}\sin\varphi\big)\cos\varphi + \big(f_{xy}\cos\varphi + f_{yy}\sin\varphi\big)\sin\varphi$$

und

$$\begin{aligned} F_{\varphi\varphi} = {} & \big(f_{xx} r\sin\varphi - f_{xy} r\cos\varphi\big) r\sin\varphi - f_x r\cos\varphi \\ & - \big(f_{xy} r\sin\varphi - f_{yy} r\cos\varphi\big) r\cos\varphi - f_y r\sin\varphi \end{aligned}$$

nach der Kettenregel berechnen und einsetzen.

2) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$***:*** Für den $\mathbb{R}^3$ gibt es zwei naheliegende Verallgemeinerung der Polarkoordinaten: Einmal können wir in der (x, y)-Ebene Polarkoordinaten einführen, die z-Koordinate aber unverändert lassen, zum anderen können wir neben dem Abstand vom Nullpunkt zwei Winkelkoordinaten einführen, wie z.B. die geographische Länge und Breite. Hier soll es zunächst um den ersten Fall gehen, wir haben also drei Koordinaten (r, φ, z) mit $r > 0$, die über die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \text{und} \quad z = z$$

mit den kartesischen Koordinaten verbunden sind. Diese Koordinaten heißen *Zylinderkoordinaten,* da die Flächen r = *konstant* Zylinder sind. Insbesondere ist die Koordinate r hier nicht mehr gleich dem Abstand

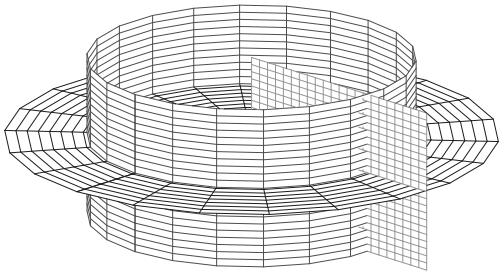

Abb. 41: Flächen mit konstantem r, φ und z für Zylinderkoordinaten

eines Punktes vom Nullpunkt, sondern gleich dem Abstand von der z-Achse.

Da die z-Koordinate des kartesischen Koordinatensystems übernommen wird, brauchen wir für diese Koordinaten nicht neu zu rechnen, sondern können die obigen Ergebnisse praktisch wörtlich übernehmen: Mit

$$F(r, \varphi, z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

ist

$$f_x = F_r\cos\varphi - \frac{F_\varphi}{r}\sin\varphi$$
$$f_y = F_r\sin\varphi + \frac{F_\varphi}{r}\cos\varphi$$
$$f_z = F_z$$

und

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = F_{rr} + \frac{F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2} + F_{zz}\,.$$

3) Kugelkoordinaten: Hier führen wir zusätzlich zu den beiden Polarkoordinaten der Ebenen als dritte Koordinate noch eine *Winkelkoordinate* ϑ ein, wir haben also drei Koordinaten (r, φ, ϑ), wobei r wieder positiv sein muß und den Abstand vom Nulpunkt bezeichnet.

Im Gegensatz zur Konvention der Geographen, wonach der Äquator, d.h. der Schnittkreis einer Kugel um den Nullpunkt mit der (x, y)-Ebenen, die

Breite Null hat, ist es in der Mathematik, Physik und Technik üblich, dem Äquator die Koordinate $\vartheta = \pi/2$ zu geben, dem „Nordpol“, d.h. dem Schnittpunkt mit der positiven z-Achse, $\vartheta = 0$ und dem Südpol $\vartheta = \pi$. In der (x, z)-Ebene ist also

$$x = r\sin\vartheta \quad \text{und} \quad z = r\cos\vartheta\,,$$

in der (y, z)-Ebene

$$y = r\sin\vartheta \quad \text{und} \quad z = r\cos\vartheta\,,$$

und ganz allgemein ist

$$R = r\sin\vartheta \quad \text{und} \quad z = r\cos\vartheta\,,$$

wobei R den Abstand eines Punktes von der z-Achse bezeichnet.

Für einen Punkt im Abstand R von der z-Achse ist

$$x = R\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = R\sin\varphi\,,$$

zusammen mit den obigen Formeln erhalten wir also als Zusammenhang zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta$$
$$z = r\cos\vartheta\,.$$

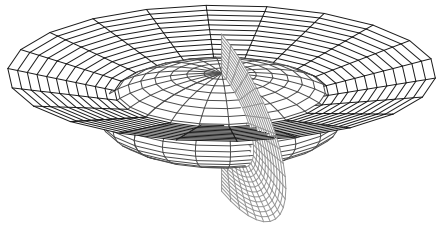

Abb. 42: Flächen mit konstantem r, φ und ϑ für Kugelkoordinaten

Die Flächen mit konstantem r sind hier natürlich Kugeln, konstantes φ führt wie bei den Zylinderkoordinaten auf Halbebenen, und die Flächen mit konstantem ϑ schließlich sind Kegel um die z-Achse.

Wieder können wir einer Funktion $f(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten durch

$$F(r, \varphi, \vartheta) \underset{\text{def}}{=} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$$

eine neue Funktion zuordnen und durch Anwendung der Kettenregel sowie Lösen eines linearen Gleichungssystems die partiellen Ableitungen zueinander in Beziehung setzen; die Vorgehensweise ist im wesentlichen wie bei den ebenen Polarkoordinaten, nur daß wir jetzt ein System aus drei linearen Gleichungen bekommen:

$$\begin{aligned} F_r &= f_x\cos\varphi\sin\vartheta + f_y\sin\varphi\sin\vartheta + f_z\cos\vartheta \\ \frac{F_\varphi}{r} &= -f_x\sin\varphi\sin\vartheta + f_y\cos\varphi\sin\vartheta \\ \frac{F_\vartheta}{r} &= f_x\cos\varphi\cos\vartheta + f_y\sin\varphi\cos\vartheta - f_z\sin\vartheta\,. \end{aligned}$$

Der GAUSS-Algorithmus führt schnell auf die Lösung

$$\begin{aligned} f_x &= F_r\cos\varphi\sin\vartheta - \frac{F_\varphi\sin\varphi}{r\sin\vartheta} + \frac{F_\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta}{r} \\ f_y &= F_r\sin\varphi\sin\vartheta - \frac{F_\varphi\cos\varphi}{r\sin\vartheta} + \frac{F_\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta}{r} \\ f_z &= F_r\cos\vartheta - \frac{F_\vartheta\sin\vartheta}{r}\,. \end{aligned}$$

Im Prinzip genauso können auch die zweiten Ableitungen berechnet werden; eine grausame, wenn auch nicht sonderlich schwierige Rechnung ergibt, daß beispielsweise

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \\ &= F_{rr} + \frac{2F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{F_{\vartheta\vartheta}}{r^2} + \frac{F_\vartheta}{r^2\tan\vartheta} \end{aligned}$$

ist.

Als Beispiel wollen wir damit noch einmal die Divergenz des elektrischen Felds einer Ladung q im Nullpunkt berechnen: Diese erzeugt ein Potential

$$U(r, \varphi, \vartheta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,,$$

das Feld ist $\vec{E} = -\operatorname{grad} U$ und

$$\operatorname{div}\vec{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad} U = -\Delta U = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r}\cdot\frac{-1}{r^2}\right) = 0\,.$$

§3: Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^n$

Die zweite Säule der Analysis ist neben der Differentialrechnung die Integralrechnung. Wir wollen im Rest dieses Kapitels sehen, wie diese sich auf Mehrdimensionale verallgemeinert. In diesem Paragraphen werden die Mengen, über die integriert wird, noch eindimensional sein, d.h. also Kurven, aber immerhin schon in einem Raum beliebiger Dimension liegen. Entsprechende Integrale benötigt man einerseits, um Bogenlängen von Kurven zu berechnen, vor allem aber sind sie wichtig, um die aufzuwendende oder freiwerdende Energie bei der Bewegung eines Objekts in einem Kraftfeld (oder einem elektrisch geladenen Teilchens in einem elektrischen Feld *usw.*) zu berechnen. Wir beginnen mit der Definition von Kurven:

a) Kurven und Tangentenvektoren

Definition: *a)* Ein *Kurvenstück* γ ist eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

eines Intervalls in den $\mathbb{R}^n$.
b) Eine *Kurve* γ ist eine endliche Folge von Kurvenstücken

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_r\colon [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n$$

von Kurvenstücken mit der Eigenschaft, daß

$$\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1}) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1.$$

c) Eine Kurve γ heißt geschlossen, wenn $\gamma_r(b_r) = \gamma_1(a_1)$ ist.

Die Bedingung im Teil *b)* der obigen Definition stellt sicher, daß Kurven, anschaulich betrachtet, zusammenhängend sind; es hat allein praktische Gründe, daß man nicht auch von den Intervallen verlangt, daß sie unmittelbar aneinander anschließen: Oft werden die Formeln für ein Kurvenstück einfacher, wenn man einen bestimmten Anfangswert wie etwa die Null für das Intervall nehmen kann.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen einer Kurve und einem Kurvenstück liegt in der Differenzierbarkeit: Durch Verschiebung der Parameterintervalle könnte man jede Kurve durch eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ beschreiben, aber dort, wo zwei Kurvenstücke aneinanderstoßen, muß diese Abbildung nicht differenzierbar sein; anschaulich gesprochen kann die Kurve dort einen „Knick“ haben.

Die Ableitung $\dot\gamma(t)$ ist ein Vektor, dessen Komponenten die Ableitungen der Koordinatenfunktionen von $\gamma(t)$ sind; wir bezeichnen ihn als Tangentenvektor der Kurve im Punkt $\gamma(t)$. Gelegentlich wird es wichtig sein, daß dieser Vektor ungleich dem Nullvektor ist; wir definieren daher

Definition: *a)* Ein Kurvenstück $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär,* wenn $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$.
b) Eine Kurve γ heißt *stückweise regulär,* wenn sie aus regulären Kurvenstücken zusammengesetzt werden kann.

Man beachte, daß für die Intervallendpunkte nichts gefordert wird: Selbst wenn die Ableitung dort existiert, muß sie nicht von Null verschieden kann. Auf diese Weise läßt sich ein Kurvenstück, bei dem $\dot\gamma(t)$ an endlich vielen Stellen gleich dem Nullvektor ist, immer noch als stückweise reguläre Kurve auffassen.

Anschaulich kann man sich ein Kurvenstück durch sein Bild im $\mathbb{R}^n$ vorstellen, allerdings muß man beachten, daß dasselbe Bild durch ganz verschiedene Funktionen parametrisiert werden kann. Als Beispiel für verschiedene Parametrisierungen einer und derselben Kurve betrachten wir den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$. Seine bekannteste Darstellung als Kurvenstück ist die Parametrisierung

$$\gamma_1\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)\,,$$

aber natürlich wäre auch

$$\gamma_2\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

eine Möglichkeit. Es geht aber auch ganz anders, denn auch bei

$$\gamma_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)$$

liegen sämtliche Bildpunkte auf dem Einheitskreis, und zumindest für jedes endliche Teilintervall von $\mathbb{R}$ definiert auch γ_3 ein Kurvenstück. Wie eine kurze Kurvendiskussion (oder ein Blick auf Abbildung 43) zeigt, besteht das Bild von γ_3 aus allen Punkten des Einheitskreises außer $(1, 0)$; letzterer Punkt ist der Grenzwert von $\gamma_3(t)$ für $t \to \pm\infty$.

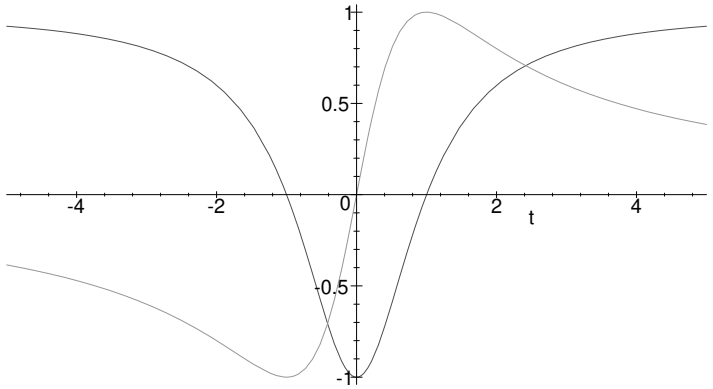

Abb. 43: Graph der Funktionen $x(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ und $y(t) = \frac{2t}{t^2+1}$

Jede dieser Parametrisierungen führt zu anderen Tangentenvektoren: Für einen festen Kurvenpunkt liegen zwar alle drei Vektoren auf ein und derselben Geraden, der Tangenten an den Kreis, aber sie haben verschiedene Länge: Für $(x, y) = \gamma_1(t)$ ist

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

für $(x, y) = \gamma_2(t)$ ist

$$\dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -2\pi \sin 2\pi t \\ 2\pi \cos 2\pi t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi y \\ 2\pi x \end{pmatrix},$$

und für $(x, y) = \gamma_3(t)$ schließlich zeigt eine kurze Rechnung, daß

$$\dot\gamma_3(t) = \frac{2}{(t^2+1)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} = \frac{2}{t^2+1} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

ist. Bei der Parametrisierung mit γ_2 sind die Tangentenvektoren also jeweils 2π mal so lang wie bei der mit γ_1, was man anschaulich so interpretieren kann, daß der Kreis bei dieser Parametrisierung 2π mal so schnell durchlaufen wird wie bei der mit γ_1. Bei der Parametrisierung mit γ_3 ist die Länge der Vektoren variabel, und sie zeigen auch in die Gegenrichtung zu den Tangentenvektoren an γ_1 und γ_2; bei dieser Parametrisierung wird der Kreis also im Uhrzeigersinn durchlaufen.

b) Die Bogenlänge einer Kurve

In der Integralrechnung wird die Fläche unterhalb einer Kurve dadurch definiert, daß man sie durch Rechtecke angenähert; falls deren Gesamtfläche bei immer feiner werdenden Unterteilungen gegen einen festen Grenzwert konvergiert, bezeichnetet man diesen als Fläche unterhalb der Kurve oder auch als RIEMANN-Integral über die die Kurve beschreibende Funktion.

Nichts spricht dagegen, bei der Definition der Bogenlänge genauso vorzugehen: Die primitiven Bausteine, mit denen wir die Kurve annähern, sind nun natürlich keine Rechtecke mehr, sondern Strecken; am einfachsten nehmen wir dazu Tangentenvektoren. Dazu brauchen wir allerdings Differenzierbarkeit, wir müssen uns also zunächst auf ein Kurven*stück* beschränken.

Sei also $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Kurvenstück; wir unterteilen das Intervall, wie wir es vom RIEMANN-Integral her gewohnt sind, durch Zwischenpunkte

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und wählen in jedem Teilintervall (t_i, t_{i+1}) einen Zwischenpunkt τ_i. Der Tangentenvektor im Punkt τ_i ist nach Definition $\dot\gamma(\tau_i)$, allerdings ist das

nicht unbedingt der Vektor, den wir wollen: Wir wollen schließlich die Kurve durch ihre Tangente annähern, und dazu müssen wir die Länge an das Intervall anpassen, über dem wir die Kurve approximieren wollen. Indem wir den Vektor $\dot\gamma(\tau_i)$ der Differentialquotienten

$$\frac{1}{t_{i+1}-t_i} \cdot \overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} = \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \begin{pmatrix} \gamma_1(t_{i+1}) - \gamma_1(t_i) \\ \vdots \\ \gamma_n(t_{i+1}) - \gamma_n(t_i) \end{pmatrix}$$

approximieren sehen wir, daß der Vektor $\overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}$ ungefähr gleich

$$\dot\gamma(\tau_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

ist, die Bogenlänge der Kurve kann also angenähert werden durch

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left\| \dot\gamma(\tau_i) \right\| \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Für die Kreislinie mit ihrer Parametrisierung $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist dies in den Abbildungen 44 und 45 dargestellt für eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[0, 2\pi]$ in zwanzig *bzw.* fünfzig Teilintervalle; im letzteren Fall ist in der Tat kaum mehr ein Unterschied zu sehen zwischen der Kreislinie und den fünfzig Vektoren, durch die sie approximiert wird.

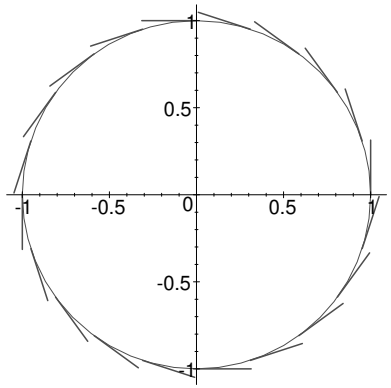

Abb. 44: Bogenlänge des Einheitskreises angenähert durch zwanzig Strecken

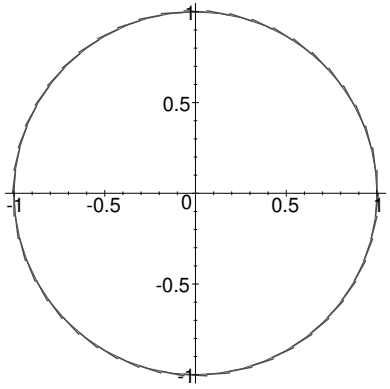

Abb. 45: Bogenlänge des Einheitskreises angenähert durch fünfzig Strecken

Da γ nach Definition eines Kurvenstücks stetig differenzierbar ist, ist auch $\|\dot\gamma(t)\|$ immerhin noch eine stetige und damit insbesondere RIEMANN-integrierbare Funktion; wir wissen also, daß der Grenzwert für immer enger werdende Verfeinerungen der Unterteilung existiert und gleich dem Integral über diese Funktion ist. Somit kommen wir auf ganz natürliche Weise auf die

Definition: *a)* Die Bogenlänge eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist

$$\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt\,.$$

b) Die Bogenlänge einer Kurve γ, bestehend aus den Kurvenstücken $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ ist die Summe der Bogenlängen der Kurvenstücke γ_i.

Um zu sehen, ob das alles wirklich vernünftig ist, berechnen wir die Bogenlänge der Kreislinie

$$\gamma_1\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2;\quad t \mapsto (\cos t, \sin t)\,.$$

Hier ist

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},\quad \text{also}\quad \|\dot\gamma_1(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1\,,$$

und damit ist die Bogenlänge

$$\int_0^{2\pi} \|\dot\gamma_1(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,,$$

wie erwartet; zumindest für diese Parametrisierung ist also alles vernünftig.

Alternativ hatten wir die Kreislinie auch parametrisiert durch

$$\gamma_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\quad t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1},\ \frac{2t}{t^2+1}\right)\,;$$

hier ist die Bogenlänge im Sinne obiger Definition nicht erklärt, jedoch können wir natürlich γ_3 auf endliche Intervalle einschränken und diese immer größer werden lassen; falls ein Grenzwert existiert, bekommen wir also hier die Bogenlänge als uneigentliches Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\dot\gamma_3(t)\|\, dt\,.$$

Berechnen wir zunächst die Ableitung von γ_3:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = \frac{(t^2+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{t^2+1}\right) = \frac{(t^2+1)\cdot 2 - 2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\,,$$

d.h.

$$\|\dot\gamma_3(t)\| = \frac{\sqrt{(4t)^2 + 4(t^2-1)^2}}{(t^2+1)^2} = \frac{2\sqrt{(t^2+1)^2}}{(t^2+1)^2} = \frac{2}{t^2+1}\,.$$

Wie Abbildung 46 zeigt, ist diese Annäherung der Kreislinie durch Strecken erheblich unregelmäßiger als die obige, aber beim Übergang zu immer feiner werdenden Unterteilungen gehen natürlich trotzdem alle

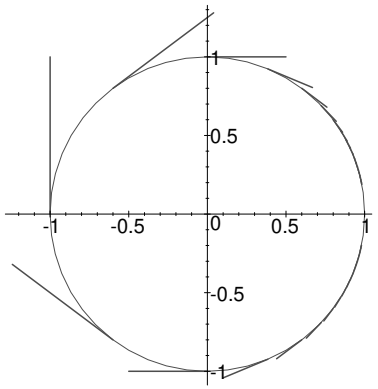

Abb. 46: Approximation durch Strecken in der rationalen Parametrisierung

Streckenlängen gegen null. (Eingezeichnet sind die Strecken zu einer Unterteilung des Intervalls $[-10, 10]$ in Teilintervalle der Länge $1/2$.)

Die Bogenlänge ist somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,dt}{t^2+1} = 2\arctan t\Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi\,;$$

auch bei dieser Parametrisierung erhalten wir also dasselbe Ergebnis, wie dies aus geometrischen Gründen auch sein muß: Die Bogenlänge ist schließlich eine Eigenschaft einer Kurve, nicht einer speziellen Parametrisierung der Kurve.

Ganz so einfach ist die Sache allerdings nun doch nicht: Schließlich parametrisiert auch

$$\gamma_4\colon [0, 20\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

die Kreislinie, aber nun ist die Bogenlänge

$$\int_0^{20\pi} \left\|\dot\gamma_4(t)\right\| dt = \int_0^{20\pi} dt = 20\pi\,.$$

Auch das erscheint geometrisch durchaus sinnvoll: Wenn man nicht nur einmal, sondern zehnmal im Kreise herum geht, legt man schließlich einen zehnmal so langen Weg zurück.

Wir müssen also etwas sorgfältig sein, wenn wir präzisieren wollen, was die Unabhängigkeit der Bogenlänge von der Parametrisierung wirklich bedeuten soll; da das ganze dadurch auch etwas umfangreicher wird, sei das entsprechende Lemma in den nächsten Abschnitt verschoben, wo wir es gleich etwas allgemeiner beweisen werden.

c) Integration eines Vektorfelds längs einer Kurve

Die Hauptanwendung von Kurvenintegralen besteht nicht darin, die Längen aller möglicher Kurven zu berechnen; der Hauptgrund, warum wir solche Integrale betrachten, ist die Berechnung der aufzuwendenden oder freiwerdenden Energie bei der Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld *bzw.* – im Fall eines elektrisch geladenen Teilchens – eines elektromagnetischen Felds.

Gehen wir der Einfachheit halber aus von einem Kraftfeld $\vec F(\boldsymbol{x})$ und einem Teilchen, das sich entlang eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ durch dieses Feld bewegt, d.h. der Vektor $\vec F\big(\gamma(t)\big)$ sei für alle t aus $[a, b]$ definiert. Im Punkt $\gamma(t)$ greift dann also der Kraftvektor $\vec F\big(\gamma(t)\big)$ an; die Arbeit, die das Teilchen verrichten muß oder gewinnt, ist das Skalarprodukt aus Kraftvektor und (Tangential-)Vektor des Wegs.

Um die Gesamtarbeit zunächst näherungsweise auszurechen, unterteilen wir wie gewohnt das Intervall $[a, b]$ durch Zwischenpunkte

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und wählen in jedem Teilintervall (t_i, t_{i+1}) einen Punkt τ_i. Zwischen den Punkten $\gamma(t_i)$ und $\gamma(t_{i+1})$ approximieren wir die Kurve wie im vorigen Abschnitt durch den Tangentenvektor $\dot\gamma(\tau_i)\cdot(t_{i+1} - t_i)$, die Arbeit kann dann angenähert werden durch

$$\sum_{i=0}^{N-1} \vec F\big(\gamma(\tau_i)\big) \cdot \dot\gamma(\tau_i)$$

Da γ nach Definition eines Kurvenstücks stetig differenzierbar ist, ist $\vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot{\gamma}(t)$ für ein stetiges Vektorfeld eine stetige und damit insbesondere RIEMANN-integrierbare Funktion; wir wissen also, daß der Grenzwert für immer enger werdende Verfeinerungen der Unterteilung existiert und gleich dem Integral über diese Funktion ist.

Definition: *a)* $\vec{V} \in \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}^n)$ sei ein stetiges Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und $\gamma\colon [a,b] \to D$ sei ein Kurvenstück. Das Integral über $\vec{V}$ entlang γ ist

$$\int\limits_{\gamma} \vec{V}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \underset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b \vec{V}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt\,.$$

b) Das Integral über $\vec{V}$ entlang einer Kurve γ ist die Summe der Integrale über $\vec{V}$ entlang der Kurvenstücke, aus denen γ zusammengesetzt ist.

Noch allgemeiner können wir ausgehen von einer beliebigen stetigen Funktion $f\colon C \to \mathbb{R}$ auf dem Bild $C = \gamma\big([a,b]\big)$ des Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und diese entlang γ integrieren. Als Motivation könnte man sich etwa vorstellen, daß γ eine materielle Kurve ist und $f\big(\gamma(t)\big)$ die (lineare) Massendichte im Punkt $\gamma(t)$ angibt, oder γ könnte den Weg eines Teilchens durch eine Flüssigkeit mit räumlich variabler Viskosität beschreiben *usw.*

Wenn wir wieder von derselben Unterteilung wie oben ausgehen und das Kurvenstück durch eine Folge von Tangentenvektoren approximieren, müssen wir hier die Summen

$$\sum_{i=0}^{N-1} f\big(\gamma(\tau_i)\big)\, \big\|\dot{\gamma}(\tau_i)\big\|$$

betrachten, und diese konvergieren wegen der Stetigkeit von f gegen

$$\int\limits_{\gamma} f(\boldsymbol{x})\, ds \underset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \big\|\dot{\gamma}(t)\big\|\, dt\,.$$

Analog definieren wir auch das Integral über eine *Kurve* γ.

Definition: $\int\limits_{\gamma} f(\boldsymbol{x})\, ds$ heißt RIEMANN-STIELTJES-Integral über f entlang γ.

(ds steht hier für das Bogenelement der Kurve, wobei der Buchstabe s wohl vom lateinischen *spatium* = Entfernung kommen dürfte.)

Der niederländische Mathematiker THOMAS JAN STIELTJES (1856–1894) studierte in Leiden, schwänzte dort aber viele Vorlesungen um stattdessen die Werke von GAUSS und JACOBI zu lesen. Obwohl er bei seinen Prüfungen dreimal durchfiel, wurde er Assistent am Observatorium von Leiden, dessen Direktor ein Freund seines Vaters war. 1883 heiratete er und wechselte unter anderem auf Betreiben seiner Frau von der Astronomie zur Mathematik. Nachdem eine Berufung nach Groningen an seinem fehlenden Hochschulabschluß gescheitert war, übersiedelte er 1885 nach Frankreich, wo er Professor an der Universität Toulouse wurde und bis an sein Lebensende blieb. Seine Arbeiten befassen sich vor allem mit Verbindungen zwischen der Zahlentheorie und der Analysis; das RIEMANN-STIELTJES-Integral wurde in einer Arbeit über Kettenbrüche eingeführt.

Dieses RIEMANN-STIELTJES-Integral wird im Spezialfall $f \equiv 1$ zur Bogenlänge, und für ein reguläres Kurvenstück γ ohne Selbstschnitte wird es für

$$f\big(\gamma(t)\big) = \frac{\vec{V}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot{\gamma}(t)}{\big\|\dot{\gamma}(t)\big\|}$$

zum Integral entlang γ über das Vektorfeld $\vec{V}$. (Falls sich die Kurve γ selbst schneidet, wie etwa eine 8, ist $\dot{\gamma}(t)$ im Schnittpunkt eventuell nicht nur vom Punkt $\gamma(t)$ abhängig, sondern vom Parameter t, so daß wir dann nicht in der Situation von RIEMANN-STIELTJES sind. Meist ist dies jedoch kein Problem, denn wenn so etwas nur endlich oft vorkommt, können wir die Kurve γ in endlich viele Kurvenstücke zerlegen, deren jedes die Voraussetzung erfüllt.)

Natürlich gelten auch für RIEMANN-STIELTJES-Integrale die üblichen, aus der klassischen Integralrechung bekannten Rechenregeln: Da wir Kurvenintegrale als spezielle RIEMANN-Integrale definiert haben, sind dies in der Tat einfach Spezialfälle der dortigen Regeln. Wir haben also,

zum Beispiel, wieder die *Monotonieregel*

$$\int_\gamma f(\boldsymbol{x})\,ds \le \int_\gamma g(\boldsymbol{x})\,ds \quad \text{falls } f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x}) \text{ für jeden Punkt auf } \gamma,$$

die *Linearität*seigenschaft

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\,ds = \alpha \int_\gamma f\,ds + \beta \int_\gamma g\,ds\,,$$

und für *Zusammensetzungen* gilt

$$\int_{\gamma+\delta} f\,ds = \int_\gamma f\,ds + \int_\delta f\,ds\,,$$

wobei $\gamma+\delta$ jene Kurve bezeichne, deren erste Kurvenstücke die Kurve γ definieren, während die restlichen die Bestandteile von δ sind.

Schließlich haben wir auch noch einen

Mittelwertsatz: Für jedes Kurvenstück $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und jede stetige Funktion f auf $\gamma([a,b])$ gibt es einen Parameterwert $\tau \in [a,b]$, so daß gilt

$$\int_\gamma f\,ds = f(\tau) \cdot \textit{Bogenlänge von } \gamma\,.$$

Beweis: Dies ist einfach der gewöhnliche Mittelwertsatz der Integralrechnung, angewandt auf die Funktion

$$t \mapsto f\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\,.$$

∎

Es ist hier nicht wesentlich, daß γ als Kurven*stück* vorausgesetzt war; ein einfaches Argument mit dem Zwischenwertsatz zeigt, daß der Mittelwertsatz auch für Kurven gilt. Wesentlich ist dagegen die Stetigkeit von f, denn da der der Mittelwertsatz der Integralrechnung nur für stetige Funktionen gilt, können wir ihn nur anwenden, wenn $f\big(\gamma(t)\big)$ stetig ist. Ein einfaches Gegenbeispiel zum Mittelwertsatz wäre eine Kurve aus zwei gleichlangen Komponenten, auf deren einer f konstant gleich eins

ist, während es auf der anderen verschwindet. Nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf die beiden Komponenten, folgt, daß der Mittelwert über die gesamte Kurve gleich 1/2 ist, aber dieser Wert wird von f nirgends angenommen.

Als nächstes kommen wir zu der angekündigten Unabhängigkeit des Kurvenintegrals von der Parametrisierung der Kurve. Da diese, wie wir am Beispiel der mehrfach durchlaufenenen Kreislinie gesehen haben, nicht ganz uneingeschränkt gilt, müssen wir zunächst definieren, was wir meinen:

Definition: Zwei Kurvenstücke $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\delta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ gibt mit $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$ derart, daß $\delta \circ \varphi = \gamma$ ist, d.h. für alle $x \in [a,b]$ ist $\delta\big(\varphi(x)\big) = \gamma(x)$.

Dese Definition stellt insbesondere sicher, daß $\gamma\big([a,b]\big)$ und $\delta\big([c,d]\big)$ dieselbe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ sind, so daß die beiden Kurven als Punktmengen übereinstimmen; durch die geforderte Bijektivität von φ ist aber auch sichergestellt, daß die Kurve bei beiden Parametrisierungen gleich oft durchlaufen wird. Daher erwarten wir

Lemma: $\gamma\colon [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\delta\colon [c,d] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ seien äquivalente Kurvenstücke, und $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_\gamma f(\boldsymbol{x})\,ds = \int_\delta f(\boldsymbol{x})\,ds\,.$$

Der *Beweis* ist eine einfache Anwendung der Kettenregel und der Substitutionsregel: Nach Definition der Äquivalenz gibt es eine bijektive stetig differenzierbare Funktion φ mit $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$, so daß $\gamma = \delta \circ \varphi$ und damit $\dot\gamma = (\dot\delta \circ \varphi) \cdot \dot\varphi$ ist. Offensichtlich muß φ monoton wachsen, also ist $\dot\varphi(t)$ nirgends negativ und somit gleich seinem Betrag.

Nach der Substitutionsregel ist

$$\int_\gamma f(\boldsymbol{x})\,ds = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,|\dot\gamma(t)|\;dt = \int_a^b f\Big(\delta\big(\varphi(t)\big)\Big)\,\Big|\dot\delta\big(\varphi(t)\big)\Big|\,\dot\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_c^d f\big(\delta(t)\big)\,\Big|\dot\delta(t)\Big|\;dt = \int_\delta f(\boldsymbol{x})\,ds\,.$$

■

d) Zirkulationsfreie und konservative Vektorfelder

Wir haben Kurvenintegrale über Vektorfelder eingeführt, um die Energie zu beschreiben, die zur Bewegung eines Teilchens durch ein Kraftfeld (oder ein elektromagnetisches Feld) aufgewendet werden muß oder dabei frei wird. Das gerade bewiesene Lemma zeigt, daß diese (Gesamt-)Energie nur vom Weg des Teilchens abhängt, nicht aber beispielsweise von seiner Geschwindigkeit. Wie aus der Physik bekannt ist, hängt aber beispielsweise bei reibungsfreier Bewegung eines Teilchens in einem mechanischen Kraftfeld der Weg nicht einmal von der Kurve ab, sondern nur von deren Anfangs- und Endpunkt oder, genauer gesagt, vom der potentiellen Energie des Anfangs- und des Endpunkts. Insbesondere verschwindet also das Integral längs einer jeden geschlossenen Kurve. In diesem Abschnitt wollen wir Vektorfelder mit dieser Eigenschaft genauer untersuchen.

Definition: *a)* Ein Vektorfeld $\vec V\colon D \to \mathbb{R}^n$ heißt *zirkulationsfrei,* wenn für jede geschlossene Kurve γ in D gilt:

$$\int_\gamma \vec V\,ds = 0\,.$$

b) Das Vektorfeld $\vec V$ heißt *konservativ,* wenn es eine differenzierbare Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $\vec V = \operatorname{grad}\varphi$ ist. φ heißt *Stammfunktion* von $\vec V$ und $-\varphi$ *Potentialfunktion.*

Zum Verständnis des Begriffs *konservativ* betrachten wir ein Beispiel aus der Physik: Ein Teilchen mit konstanter Masse m bewege sich durch das Gravitationsfeld

$$\vec F = -\operatorname{grad}\left(G\frac{Mm}{r}\right)$$

eines Himmelskörpers oder, allgemeiner, durch irgendein Potentialfeld $\vec F = -\operatorname{grad} U$. Nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz gilt dann für die Bahn $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ des Teilchens mit der Zeit t als Parameter

$$\vec F\big(\gamma(t)\big) = m\ddot\gamma(t)\,,$$

d.h. die im Punkt $\gamma(t)$ wirkende Kraft ist gleich der Masse des Teilchens mal seiner Beschleunigung. Also ist in jedem Punkt $\gamma(t)$

$$m\ddot\gamma(t) + \operatorname{grad} U\big(\gamma(t)\big) = 0\,.$$

Um aus dieser Vektorgleichung eine skalare Beziehung abzuleiten, bilden wir das Skalarprodukt mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot\gamma(t)$:

$$0 = m\ddot\gamma(t)\cdot\dot\gamma(t) + \operatorname{grad} U\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot\gamma(t)\cdot\dot\gamma(t) + U\big(\gamma(t)\big)\right)$$

nach Produkt- und Kettenregel. Also ist

$$E = \frac{m\big\|\dot\gamma(t)\big\|^2}{2} + U\big(\gamma(t)\big)$$

konstant, und das ist der klassische Energieerhaltungssatz: Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist eine zeitlich unveränderliche Erhaltungsgröße.

Der Name „konservativ“ kommt vom lateinischen *conservare* = erhalten; der Grund für das negative Vorzeichen der Potentialfunktion liegt darin, daß der Gradient in Richtung des stärksten *Anstiegs* einer Funktion zeigt, wohingegen die Natur versucht, ein System zum Energie*minimum* zu bringen, so daß die Kräfte in Gegenrichtung zum Gradienten wirken.

Wie zu erwarten, sind die beiden Begriffe *konservativ* und *zirkulationsfrei* nicht unabhängig voneinander; tatsächlich werden wir gleich sehen, daß sie sogar äquivalent sind. Aus technischen Gründen wollen

uns uns dabei, auch wenn es nicht unbedingt nötig wäre, auf sogenannte *zusammenhängende* Mengen beschränken:

Definition: Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend,* wenn es zu je zwei Punkten $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ eine Kurve γ gibt mit Anfangspunkt $\boldsymbol{x}$ und Endpunkt $\boldsymbol{y}$.

Diese Definition fordert zwar genau das, was wir gleich brauchen werden, sie ist aber nicht die übliche Definition einer zusammenhängenden Menge: In der Analysis wie auch in der Topologie bezeichnet man eine Menge D dann als zusammenhängend, wenn sie nicht als disjunkte Vereinigung zweier offener Teilmengen von D geschrieben werden kann; dies ist im allgemeinen eine schwächere Bedingung als die hier geforderte. Für eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die beiden Definitionen aber äquivalent:

Sei nämlich D_0 die Menge aller Punkte aus der offenen Menge D, die mit dem Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in D$ durch einen Weg verbunden werden können. Dann ist D_0 offen, denn für $\boldsymbol{x}_1 \in D_0$ gibt es wegen der Offenheit von D eine ε-Umgebung von $\boldsymbol{x}_1$, die ganz in D liegt. Da jeder Punkt dieser ε-Umgebung durch eine Strecke mit dem Mittelpunkt $\boldsymbol{x}_1$ verbunden werden kann, liegt auch diese Umgebung in D_0, d.h. D_0 ist offen.

Aber auch das Komplement von D_0 in D ist offen, denn auch für einen Punkt $\boldsymbol{x}_2 \in D \setminus D_0$ enthält D eine ε-Umgebung. Läge diese nicht ganz in $D \setminus D_0$, gäbe es dort einen Punkt $\boldsymbol{x}_3$, der durch einen geeigneten Weg mit $\boldsymbol{x}_0$ verbunden werden könnte. Da aber $\boldsymbol{x}_3$ durch eine Strecke mit $\boldsymbol{x}_2$ verbunden werden kann, gäbe dann auch einen Weg von $\boldsymbol{x}_2$ nach $\boldsymbol{x}_0$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist $D \setminus D_0$ offen.

Damit ist D also Vereinigung der offenen und disjunkten Teilmengen D_0 und $D \setminus D_0$; wenn D zusammenhängend ist, geht das nur, wenn eine der beiden Mengen leer ist. D_0 enthält den Punkt $\boldsymbol{x}_0$, also ist $D \setminus D_0 = \emptyset$ und somit $D = D_0$. Also kann jeder Punkt aus D durch einen Weg mit $\boldsymbol{x}_0$ verbunden werden, und damit ist D zusammenhängend im Sinne der obigen Definition.

Der folgdende Satz zeigt die Äquivalenz der Begriffe *konservativ* und *zirkulationsfrei;* wegen seiner zweiten Aussage kann er als das mehrdimensionale Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechung aufgefaßt werden.

Satz: Für ein Vektorfeld $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.) $\vec{V}$ ist konservativ.

2.) Es gibt eine Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, so daß für jede Kurve γ in D gilt:

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot ds = \varphi\big(\gamma(b)\big) - \varphi\big(\gamma(a)\big) ;$$

insbesondere hängt das Integral also nur von den Endpunkten von γ ab.

3.) $\vec{V}$ ist zirkulationsfrei.

Beweis: 1.) $\Rightarrow$ 2.): Falls $\vec{V}$ konservativ ist, gibt es eine Stammfunktion φ auf D, so daß $\vec{V} = \operatorname{grad}\varphi$ ist. Für eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to D$ ist daher nach der Kettenregel

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot ds = \int_a^b \vec{V}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{grad}\varphi\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi\big(\gamma(t)\big)\, dt = \varphi\big(\gamma(b)\big) - \varphi\big(\gamma(a)\big) .$$

Damit ist das Integral, genau wie wir es vom Eindimensionalen gewohnt sind, einfach gleich der Differenz der Werte der Stammfunktion am Endpunkt und am Anfangspunkt der Kurve.

2.) $\Rightarrow$ 3.): Diese Implikation ist klar, denn wenn der Wert des Integrals nicht von der Kurve abhängt, ist das Integral längs einer geschlossenen Kurve gleich dem Integral längs der zu einem Punkt degenerierten Kurve, und das ist natürlich gleich Null.

3.) $\Rightarrow$ 2.): Zumindest anschaulich ist auch hier klar, was wir machen: Wir durchlaufen zunächst die Kurve γ in der üblichen Weise und dann die Kurve δ „rückwärts“. Dies ergibt eine geschlossene Kurve $\widetilde{\gamma}$, auf die wir *3.)* anwenden können.

Konkret sei für ein Kurvenstück $\delta_i\colon [c_i, d_i] \to \mathbb{R}^n$ von δ

$$\delta_i^*\colon [c_i, d_i] \to \mathbb{R}^n; \quad t \mapsto \delta(c_i + d_i - t)$$

das rückwärts durchlaufene Kurvenstück zu δ_i; ist r die Anzahl der δ_i, so bestehe die Kurve δ^* aus den Kurvenstücken $\delta_r^*, \ldots, \delta_1^*$. Da γ und δ dieselben Anfangs- und Endpunkte haben, ist der Endpunkt von δ^* gleich

dem Anfangspunkt von γ und umgekehrt; die Folge von Kurvenstücken $\gamma_1, \ldots, \gamma_s, \delta_r^*, \ldots, \delta_1^*$ ist deshalb eine geschlossene Kurve $\widetilde{\gamma}$. Nach Voraussetzung verschwindet das Integral längs einer solchen Kurve, d.h.

$$0 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}} \vec{V}\, ds = \int\limits_{\gamma} \vec{V}\, ds + \int\limits_{\delta^*} \vec{V}\, ds = \int\limits_{\gamma} \vec{V}\, ds - \int\limits_{\delta} \vec{V}\, ds\,,$$

und damit sind die Integrale über γ und δ gleich.

2) $\Rightarrow$ 1): $\boldsymbol{x}_0$ sei irgendein beliebig ausgewählter Punkt von D. Da D zusammenhängend ist, gibt es dann für jeden Punkt $\boldsymbol{x} \in D$ eine Kurve $\gamma_{\boldsymbol{x}}$ mit Anfangspunkt $\boldsymbol{x}_0$ und Endpunkt $\boldsymbol{x}$.

Wir definieren nun einen Kandidaten für eine Stammfunktion durch

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\gamma_{\boldsymbol{x}}} \vec{V}\, ds\,;$$

wegen der Voraussetzung *2)* hängt $\varphi(\boldsymbol{x})$ in der Tat nur von $\boldsymbol{x}$ ab und nicht von der Wahl des Wegs $\gamma_{\boldsymbol{x}}$.

Für einen hinreichend kleinen Vektor $\vec{h}$ liegt auch die Verbindungsstrecke von $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{x}+\vec{h}$ in D und kann durch eine Kurve η parametrisiert werden; dann ist

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\vec{h}) - \varphi(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\gamma_{\boldsymbol{x}+\vec{h}}} \vec{V}\, ds - \int\limits_{\gamma_{\boldsymbol{x}}} \vec{V}\, ds = \int\limits_{\eta} \vec{V}\, ds\,.$$

Speziell für einen Vektor $\vec{h} = h\vec{e}_i$ der Länge h in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_i$ der Koordinatenachse x_i ist

$$\int\limits_{\eta} \vec{V}\, ds = \int\limits_{\eta} V_i\, dx_i = \int\limits_0^h V_i(\boldsymbol{x} + t\vec{e}_i)\, dt\,,$$

und damit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\boldsymbol{x}+h\vec{e}_i) - \varphi(\boldsymbol{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_0^h V_i(\boldsymbol{x} + t\vec{e}_i)\, dt = V_i(\boldsymbol{x})$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen. Dies zeigt, daß grad $\varphi = \vec{V}$ ist und das Vektorfeld somit eine Stammfunktion hat. ∎

Im $\mathbb{R}^3$ sollten wir erwarten, daß es noch eine vierte äquivalente Charakterisierung konservativer Vektorfelder gibt: Da die Zirkulationsfreiheit mit Drehungen um eine Achse zusammenhängt, sollte für solche Felder auch die Rotation verschwinden. Diese Richtung ist trivial:

Lemma: Für ein zirkulationsfreies Vektorfeld $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^3$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ist $\operatorname{rot} \vec{V} \equiv 0$ auf D.

Beweis: Nach dem gerade bewiesenen Satz ist ein zirkulationsfreies Vektorfeld konservativ, und nach den Rechenregeln aus §2*f)* verschwindet die Rotation eines Gradienten. ∎

Die umgekehrte Richtung allerdings ist zumindest in dieser Allgemeinheit falsch. Als **Gegenbeispiel** betrachten wir das Magnetfeld eines geradlinigen stromdurchflossenen Leiters, d.h. also (abgesehen von konstanten Vorfaktoren) das Vektorfeld

$$\vec{V}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Wie wir in §2*e2)* gesehen haben, verschwindet seine Rotation im gesamten Definitionsbereich des Vektorfelds, d.h. überall außerhalb der z-Achse.

Trotzdem ist das Vektorfeld nicht zirkulationsfrei, denn für den Einheitskreis

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3;\, t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$$

ist

$$\int_\gamma \vec{V}\, ds = \int_0^{2\pi} \vec{V}\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,.$$

Der Grund für dieses Verhalten liegt, wie wir bald sehen werden, darin, daß $\vec{V}$ auf der z-Achse nicht definiert ist: Obwohl die z-Achse im Vergleich zum gesamten $\mathbb{R}^3$ nur einen – sollte man meinen – vernachlässigbar geringen Teil ausmacht, genügt selbst diese minimale Definitionslücke, um die Umkehrung des Lemmas falsch zu machen.

§4: Mehrdimensionale Integrationstheorie

Die bisher betrachteten Kurvenintegrale waren alle zurückführbar auf gewöhnliche RIEMANN-Integrale über Funktionen einer reellen Veränderlichen. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Länge von Kurven zu bestimmen, nicht aber Flächeninhalte oder Volumen von höherdimensionalen geometrischen Gebilden. Deren Berechnung, sowie die von naheliegenden Verallgemeinerungen wie dem Fluß durch die Oberfläche eines Bereichs sind Gegenstand dieses Paragraphen.

a) Flächeninhalte und Volumina

Beginnen wir mit Flächeninhalten und Volumina. Bereits das gewöhnliche RIEMANN-Integral kann als Flächeninhalt interpretiert werden, allerdings nur für die Fläche zwischen der x-Achse und einer Kurve zwischen zwei gegebenen x-Koordinaten. Hier soll es nun um beliebige Flächen im $\mathbb{R}^2$, Volumina im $\mathbb{R}^3$ und die entsprechenden höherdimensionalen Konzepte gehen.

Bei der Definition des RIEMANN-Integrals wird die Fläche unterhalb der Kurve durch Rechtecke angenähert, deren Kantenlänge in x-Richtung immer kleiner wird, während die Kantenlänge in y-Richtung durch die

y-Koordinaten der Kurve $y = f(x)$ gegeben war. Im allgemeinen Fall, wo es keine ausgezeichnete Richtung mehr gibt, wird diese Unterscheidung zwischen x- und y-Richtung offensichtlich sinnlos; die einzig mögliche Verallgemeinerung des RIEMANN-Integrals besteht darin, daß man eine Fläche durch *beliebige* Rechtecke annähert und beim Grenzübergang *beide* Seiten gegen Null gehen läßt.

Ganz entsprechend müssen für dreidimensionale Bereiche Quader betrachtet werden, deren drei Seiten mit Verfeinerung der Überdeckung immer kleiner werden, *usw.*

Formal gehen wir dazu wie folgt vor: Wir wählen ein festes Koordinatensystem im $\mathbb{R}^n$ und betrachten Quader $Q_i \subset \mathbb{R}^n$, deren Kanten parallel zu denn Koordinatenachsen sind. (Für $n = 2$ sind diese „Quader“ natürlich Rechtecke, und für $n = 1$ Intervalle.) Das Volumen eines solchen Quaders soll gleich dem Produkt seiner Kantenlängen sein, genau wie wir es aus der Elementargeometrie gewohnt sind.

Definition: Eine *Elementarmenge* in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$, die als Vereinigung endlich vieler Quader mit achsenparallelen Kanten geschrieben werden kann; dabei dürfen sich zwei Quader höchstens in gemeinsamen Randpunkten schneiden.

Im $\mathbb{R}^2$ wäre also beispielsweise jede Menge, deren Rand auf kariertem Papier so gezeichnet werden kann, daß alle Linien auf Karokanten liegen, eine Elementarmenge.

Das Volumen $\mu(E)$ einer Elementarmenge E definieren wir als die Summe der Volumina der endlich vielen Quader, aus denen die Menge besteht; man überlegt sich leicht, daß es unabhängig von der Art der Zerlegung der Menge in Quader ist.

Nun gehen wir im wesentlichen genauso vor, wie bei der Definition des RIEMANN-Integrals: Dort hatten wir die Fläche unterhalb einer Kurve $y = f(x)$ sowohl von oben als auch von unten durch Rechtecke angenähert; die Flächen der entsprechenden Elementarmengen hatten wir als RIEMANNsche Unter- *bzw.* Obersummen bezeichnet. Das Integral existierte nach Definition genau dann, wenn bei immer weiterer Verfei-

nerung der Überdeckung die Untersummen und die Obersummen gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergierten.

Entsprechend betrachten wir zur Definition des Volumens einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ Elementarmengen, die ganz in B enthalten sind und bezeichnen den Grenzwert bei immer feiner werdenden Quader als *unteres Volumen* $\underline{\mu}(B)$. Zur exakten Definition verwenden wir besser nicht einen Grenzwert, da es etwas umständlich wäre, hier zu definieren, über was genau wir den Grenzwert bilden, sondern wir definieren $\underline{\mu}(B)$ einfach als *Supremum* der Volumina aller Elementarmengen, die in B liegen:

$$\underline{\mu}(B) \underset{\text{def}}{=} \sup\left\{ \mu(E) \;\middle|\; E \subseteq B \text{ Elementarmenge} \right\},$$

falls dieses Supremum existiert. (Es existiert offensichtlich genau dann, wenn die Menge B beschränkt ist; für unbeschränkte Mengen wie etwa den gesamten $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller $\mu(E)$ unbeschränkt, so daß kein Supremum existiert.)

Genauso definieren wir ein oberes Volumen $\overline{\mu}(B)$ als *Infimum* der Volumina aller Elementarmengen, die B enthalten:

$$\overline{\mu}(B) \underset{\text{def}}{=} \inf\left\{ \mu(E) \;\middle|\; E \supseteq B \text{ Elementarmenge} \right\},$$

falls dieses Infimum existiert. (Auch hier ist die Existenz wieder an die Beschränktheit von B gekoppelt, denn für ein unbeschränkte Menge B gibt es keine Elementarmenge, die B enthält, so daß wir das Infimum über die leere Menge bilden müßten.)

Die Abbildungen 47 und 48 zeigen die Annäherung einer Kreisfläche durch Elementarmengen von innen und außen; Abbildung 49 zeigt entsprechende Elementarmengen für eine Halbkugel.

Die Definition des Volumens ist nun fast selbstverständlich:

Definition: Wir sagen, die Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ habe das Volumen $\mu(B)$, falls das untere Volumen $\underline{\mu}(B)$ und das obere Volumen $\overline{\mu}(B)$ beide existieren und gleich $\mu(B)$ sind.

Ganz entsprechend können wir auch Integrale über Funktionen definieren: $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion auf der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und

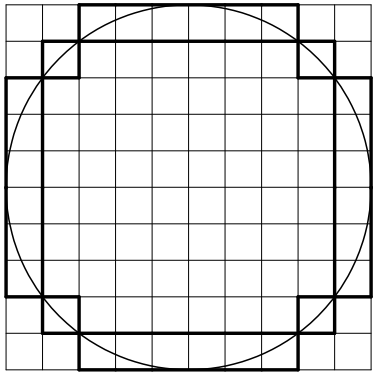

Abb. 47: Approximation einer Kreisfläche auf 10×10 Quadraten

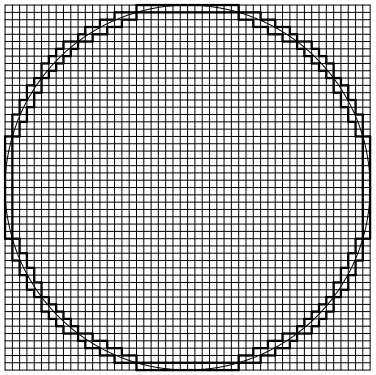

Abb. 48: Approximation einer Kreisfläche auf 50×50 Quadraten

$B \subseteq D$ sei eine Teilmenge von D. Dann können wir wieder RIEMANNsche Untersummen definieren, indem wir eine Elementarmenge $E \subseteq D$ betrachten, bestehend etwa aus den Quadern $Q_1, \ldots, Q_N$, und dazu die RIEMANNsche Untersumme definieren als

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(Q_i) \cdot \inf\{ f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in Q_i \}.$$

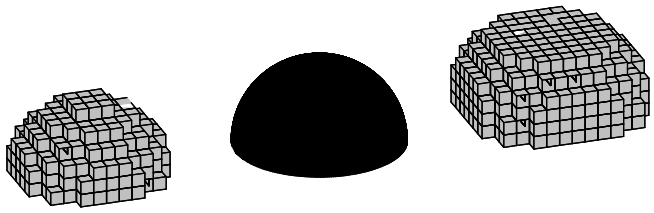

Abb. 49: Approximation einer Halbkugel durch Würfel

Die RIEMANNsche Obersumme für die Elementarmenge $E' \supseteq B$ bestehend aus den Quadern $Q'_1, \ldots, Q'_M$ ist entsprechend

$$\sum_{j=1}^{M} \mu(Q'_j) \cdot \sup\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in Q_j\},$$

und wir definieren

Definition: $\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_n$ existiert, wenn das Supremum der Menge aller RIEMANNscher Untersummen gleich dem Infimum der Menge aller RIEMANNscher Obersummen ist; dieser gemeinsame Wert ist der Wert des Integrals.

Die Schreibweise $\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_n$ soll dabei bedeuten, daß wir n Integralzeichen schreiben, für $B \subset \mathbb{R}^2$ also

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy$$

und für $B \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

(Nicht alle Lehrbücher verwenden bei der mehrdimensionalen Integration mehrere Integralzeichen; einige, wie etwa **[D]**, schreiben unabhängig

von der Dimension immer nur ein Integralzeichen. In Physik und Technik scheint die Schreibweise mit mehreren Integralzeichen üblicher zu sein; deshalb soll auch hier diese Konvention verwendet werden.)

Integrale und Volumina sind natürlich eng miteinander verwandt: Einerseits läßt sich das Volumen eines Bereichs B auch als

$$\mu(B) = \int_B \cdots \int 1\, dx_1 \cdots dx_n$$

schreiben, andererseits ist, völlig analog zur Flächeninterpretation des RIEMANN-Integrals, für eine auf B nichtnegative Funktion f

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n =$$
$$\mu\left(\left\{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{l}(x_1, \ldots x_n) \in B \text{ und} \\ 0 \le y \le f(x_1, \ldots, x_n)\end{array}\right\}\right).$$

Auch für das so definierte mehrdimensionale Integral gelten aus offensichtlichen Gründen die Analoga der aus aus der eindimensionalen Integralrechnung bekannten Rechenregeln wie die *Monotonieregel*

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n \le \int_B \cdots \int g(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n\,,$$

falls $f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x} \in B$, und die *Linearität*seigenschaft

$$\int_B \cdots \int \big(\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})\big)\, dx_1 \cdots dx_n$$
$$= \alpha \int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n + \beta \int_B \cdots \int g(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n\,.$$

Außerdem haben wir wieder einen

Mittelwertsatz: Für einen zusammenhängenden abgeschlossenen und beschränkten Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f\colon B \to \mathbb{R}$ gibt es einen Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in B$, so daß gilt

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n = f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \mu(B)\,.$$

Der *Beweis* geht ganz genauso wie in $\mathbb{R}$: Eine stetige Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an; genauso zeigt man, daß eine stetige Funktion auf einer beschränkten abgeschlossen Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt. Sei etwa $\boldsymbol{x}_1 \in B$ ein Punkt, in dem f minimal wird, und $\boldsymbol{x}_2$ einer, in dem f maximal wird. Dann ist für jedes $\boldsymbol{x} \in B$

$$f(\boldsymbol{x}_1) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_2)\,;$$

nach der Monotonieregel ist daher

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x}_1)\, dx_1 \cdots dx_n = f(\boldsymbol{x}_1) \cdot \mu(B)$$

kleiner oder gleich

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n\,,$$

was wiederum kleiner oder gleich

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x}_2)\, dx_1 \cdots dx_n = f(\boldsymbol{x}_2) \cdot \mu(B)$$

ist. Damit gibt es eine Zahl η zwischen $f(\boldsymbol{x}_1)$ und $f(\boldsymbol{x}_2)$, so daß

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \eta \cdot \mu(B)$$

ist. Wir müssen noch zeigen, daß dieses η ein Funktionswert von f auf B ist. Dazu verbinden wir $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ durch eine Kurve γ; indem wir nötigenfalls die Parameterintervalle der Kurvenstücke von γ verschieben, können wir annehmen, daß γ durch ein zusammenhängendes Parameterintervall $[a,\, b]$ parametrisiert wird. Wegen der Stetigkeit von f haben wir dann eine stetige Funktion

$$\varphi\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)$$

mit $\varphi(a) = f(\boldsymbol{x}_1)$ und $\varphi(b) = f(\boldsymbol{x}_2)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dazu ein $\tau \in [a,\, b]$ mit $\varphi(c) = \eta$; mit $\boldsymbol{x}_0 = \gamma(\tau)$ ist also $f(\boldsymbol{x}_0) = \eta$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ∎

Wie beim gewöhnlichen (eindimensionalen) RIEMANN-Integral ist die Existenz von mehrdimensionalen Integralen normalerweise kein Problem, allerdings kann man natürlich leicht Beispiele konstruieren, für die das Integral nicht existiert. Wir können etwa in Analogie zur DIRICHLETschen Sprungfunktion die Menge

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x, y \in \mathbb{Q} \text{ und } 0 \leq x, y \leq 1\big\}$$

aller Punkte mit rationalen Koordianten im Einheitsquadrat betrachten. Da $\mathbb{Q}$ keine reellen Intervalle enthält, sind alle Rechtecke, die ganz in B enthalten sind, zu Punkten degeneriert. Eine in B enthaltene Elementarmenge besteht also aus endlich vielen Punkten und hat somit den Flächeninhalt null. Eine Elementarmenge, die ganz B enthält, muß aber das gesamte Einheitsquadrat enthalten, da die rationalen Punkte dort dicht liegen; sie hat also mindestens die Fläche eins. Somit ist eins der obere und null der untere Flächeninhalt von B; der Flächeninhalt von B existiert also nicht.

Die folgende Überlegung liefert ein Kriterium für die Existenz des Volumens einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$: Die Differenzmenge zwischen einer Elementarmenge, die B enthält, und einer Elementarmenge, die in B enthalten ist, kann offenbar wieder als Elementarmenge aufgefaßt werden und enthält den Rand von B. Je besser die äußere und die innere Elementarmenge B annähern, desto weniger unterscheidet sich diese Differenzmenge vom Rand; die Existenz eines Volumens von B ist daher äquivalent dazu, daß das Volumen des Rands von B existiert und verschwindet.

Für eine *unbeschränkte* Menge B können wir bislang weder Volumen noch Integrale definieren, denn unsere Konstruktion ist nur anwendbar, wenn B in einer Elementarmenge enthalten ist. Das ist allerdings nichts neues, denn beim eindimensionalen RIEMANN-Integral tritt genau das gleiche Problem auf und wird dadurch gelöst, daß man *uneigentliche* Integrale einführt: Beispielsweise ist

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Genauso definieren wir jetzt

Definition: $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine unbeschränkte Menge und die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei in einer B umfassenden Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ erklärt. Wir sagen, das *uneigentliche Integral*

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n$$

existiere, wenn für jede Folge

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_i \subset \cdots$$

von beschränkten Mengen B_i mit $\bigcup\limits_{i\geq 1} B_i = B$ der Grenzwert

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B_i} \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n$$

existiert, und wenn er für jede solche Folge denselben Wert hat. Diesen gemeinsamen Wert bezeichnen wir als den Wert des uneigentlichen Integrals.

Wie auch im Eindimensionalen genügt es hier nicht, nur eine einzige Folge von Mengen B_i zu betrachten; ansonsten könnte man beispielsweise dem uneigentlichen Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin x \sin y \, dx\, dy$$

je nachdem, ob man für die B_i Quadrate nimmt, in deren Eckpunkten der Cosinus für beide Koordinaten verschwindet, oder Quadrate, in deren Eckpunkten die beiden Cosinus einen konstanten anderen Wert haben, dem Integral die verschiedensten Werte zuordnen. Tatsächlich aber existiert dieses uneigentliche Integral natürlich genauso wenig wie das eindimensionale Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx$.

Für interessantere Beispiele sei auf den nächsten Abschnitt verwiesen, wo wir

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

berechnen werden.

b) Integration über Normalbereiche

Der Grund dafür, daß wir bislang noch keine interessanten Beispiele für mehrdimensionale Integrale haben, liegt natürlich darin, daß man Werte von Integralen fast nie durch Anwendung der Definition bestimmt. Im Eindimensionalen wird stattdessen meist den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzt, über den die Berechnung eines Integrals auf die (nicht immer explizit mögliche) Bestimmung einer Stammfunktion zurückgeführt wurde; hier, im Mehrdimensionalen, wollen wir die Integration soweit wie möglich auf mehrfache eindimensionale Integration zurückführen. Zumindest in einem Fall wissen wir schon, wie das geht: Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ nichtnegativ, so hat

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\big\}$$

die Fläche

$$\iint_B dx\, dy = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Auch den Flächeninhalt der etwas komplizierteren Menge

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\big\}$$

läßt sich, wenn $g(x) \leq h(x)$ ist für alle $x \in [a, b]$, durch das eindimensionale Integral

$$\iint_B dx\, dy = \int_a^b \big(h(x) - g(x)\big)\, dx$$

ausdrücken. Ähnliche Formeln gelten auch nach Vertauschung der Rollen von x und y.

Definition: Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich vom Typ I,* wenn es reelle Zahlen $a \leq b$ und stetig differenzierbare Funktionen $g, h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so daß

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\big\}$$

ist. B heißt *Normalbereich vom Typ II,* wenn es reelle Zahlen $c \leq d$ und stetig differenzierbare Funktionen $g, h\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(y) \leq h(y)$ für alle $y \in [a,b]$, so daß

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c \leq y \leq d \text{ und } g(y) \leq x \leq h(y)\right\} .$$

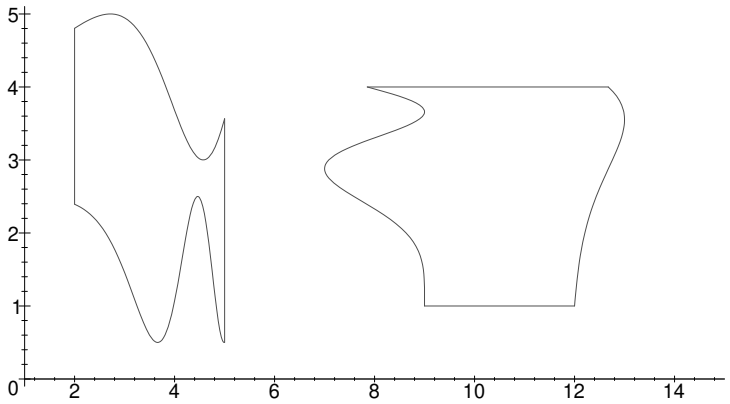

Abb. 50: Normalbereiche vom Typ I und II

Für diese Normalbereiche können wir nicht nur die Fläche leicht ausrechnen, sondern auch beliebige Integrale über stetige Funktionen:

Satz: $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$.
a) Für einen Normalbereich $B \subseteq D$ vom Typ I ist

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

b) Für einen Normalbereich $B \subseteq D$ vom Typ II ist

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right) dy .$$

Beweis: Wir wissen bereits, daß der Flächeninhalt von B existiert; da f eine stetige Funktion ist, folgt dann auch ohne größere Schwierigkeiten die Existenz des Integrals von f über B. Wir wollen darauf nicht genauer eingehen, sondern nur benutzen, daß es dann ausreicht, spezielle Folgen von Elementarmengen zu betrachten. Eine solche spezielle Folge erhalten wir etwa dadurch, daß wir den ganzen $\mathbb{R}^2$ mit einem Quadrategitter überziehen; die Seitenlänge der Quadrate sei $k = \frac{b-a}{N}$ und ihr Flächeninhalt dementsprechend gleich k^2.

Da die Aussage *b)* durch Vertauschung der beiden Koordinaten in *a)* übergeht, reicht es, den Satz für Normalbereiche vom Typ I zu beweisen.

Als in B enthaltene Elementarmenge E_N wählen wir die Menge aller Quadrate, die ganz in B liegen; als B enthaltende Elementarmenge E'_N entsprechend die Menge aller Quadrate, die nichtleeren Durchschnitt mit B haben. Wir numerieren die Quadrate in E_N und E'_N mit zwei Indizes: Das Intervall $[a,b]$ wird durch das Quadrategitter in $N-1$ Teilintervalle der Länge k zerlegt; das Quadrat Q_{ij} liege über dem i-ten dieser Teilintervalle und sei, von unter her gesehen, das j-te Quadrat, das ganz in B liegt. Die Anzahl der ganz in B liegenden Quadrate im i-ten Streifen sei r_i; dann ist die RIEMANNsche Untersumme zu E_N gleich

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{r_i} \mu(Q_{ij}) \cdot \inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) \cdot k \right) \cdot k .$$

Für die RIEMANNsche Obersumme müssen wir alle Quadrate betrachten, die mit B nichtleeren Durchschnitt haben; dabei treten im allgemeinen auch Quadrate Q_{ij} unterhalb von Q_{i1} auf, für deren Bezeichnung wir Indizes $j \leq 0$ verwenden.

Im i-ten Streifen mögen die Q_{ij} mit $s_i \leq j \leq t_i$ auftreten; dann ist die RIEMANNsche Obersumme gleich

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=s_i}^{t_i} \mu(Q_{ij}) \cdot \sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{j=s_i}^{t_i} \sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) \cdot k \right) \cdot k .$$

Da f als stetige Funktion RIEMANN-integrierbar ist, konvergieren für

$N \to \infty$ und damit $k \to 0$

$$\sum_{j=1}^{r_i} \inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y)\cdot k \quad \text{und} \quad \sum_{j=s_i}^{t_i} \sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y)\cdot k$$

beide gegen

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,;$$

die RIEMANNschen Unter- und Obersummen daher entsprechend gegen

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx\,,$$

wie behauptet. ∎

Als erstes Beispiel berechnen wir zur Kontrolle etwas Altbekanntes, die Fläche der Einheitskreisscheibe

$$B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\le 1\right\},$$

die wir hier umständlich als

$$\iint_B dx\,dy$$

ausrechnen wollen.

B kann sowohl als Normalbereich vom Typ I wie auch als solcher vom Typ II geschrieben werden:

$$\begin{aligned} B &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1\le x\le 1 \text{ und } -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1\le y\le 1 \text{ und } -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\right\}. \end{aligned}$$

In der ersten Darstellung ist nach Teil *a)* des gerade bewiesenen Satzes

$$\iint_B dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Zur Berechnung dieses Integrals können wir die *Substitutionsregel* anwenden: Mit $x = \sin t$ ist

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt\,,$$

und das rechtsstehende Integral läßt sich mit partieller Integration ausrechnen:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt &= \sin t\cos t\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t\,dt \\ &= 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\,dt = \pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt\,. \end{aligned}$$

Wenn wir das Integral ganz rechts auf die linke Seite bringen, erhalten wir den Flächeninhalt

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\,dt = \pi\,,$$

wie erwartet.

Etwa interessanter ist die Berechnung des (hoffentlich auch bekannten) Volumens der Einheitskugel

$$K = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2\le 1\right\}.$$

Hierzu könnten wir eine dreidimensionale Integration durchführen, es geht aber zum Glück auch einfacher: Natürlich genügt es, das Volumen der Halbkugel $z \ge 0$ zu bestimmen, und dies ist die Menge aller Punkte zwischen der Einheitskreisscheibe B der (x,y)-Ebene und dem Graph der Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

über B. Somit ist das Volumen der Halbkugel gleich

$$\iint\limits_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy \right) dx\,.$$

Schreibt man mit $a = \sqrt{1-x^2}$

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-y^2} = a\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}\,,$$

so ist das innere Integral

$$\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy = a \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}\,dy\,,$$

was durch die Substitution $y = au$ zu

$$a \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,a\,du = a^2 \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{\pi}{2}a^2$$

wird, wie wir oben gerade nachgerechnet haben. Somit ist

$$\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}(1-x^2)$$

und

$$\iint\limits_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}(1-x^2)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2\pi}{3}\,;$$

das Kugelvolumen als Volumen zweier Halbkugeln ist also in der Tat, wie es sein soll, gleich $4\pi/3$.

In diesen Beispielen hatten wir nur Kreisscheiben als Normalbereiche, aber der Leser kann sich leicht überzeugen selbst davon überzeugen, daß sich die Nützlichkeit dieser Mengen keineswegs auf solche trivialen Beispiele beschränkt: Man zeichne frei irgendeinen beschränkten zweidimensionalen Bereich auf ein Blatt Papier und überzeuge sich davon, daß sich dieser durch Einfügen von (meist sehr wenigen) waagrechten und senkrechten Strecken als Vereinigung von Normalbereichen der Typen I und II darstellen läßt.

c) Die Transformationsformel

Von den vielen Regeln zur expliziten Bestimmung einer Stammfunktion ist sicherlich die Substitutionsregel die nützlichste; es lohnt sich daher, nach einer Verallgemeinerung dieser Regel für mehrdimensionale Integrale zu suchen.

Die Idee im Eindimensionalen ist bekanntlich, daß wir die Integrationsvariable x als Funktion $x = \varphi(t)$ einer neuen Variablen t schreiben: Mit $a = \varphi(t_0)$ und $b = \varphi(t_1)$ ist

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(\varphi(t)\big)\dot{\varphi}(t)\,dt\,.$$

Genauso können wir auch bei einer Funktion mehrerer Veränderlicher diese als Funktionen neuer Variabler schreiben.

Beginnen wir der Anschaulichkeit halber mit einer Funktion $f(x,y)$ zweier Veränderlicher und schreiben wir diese als Funktionen

$$x = x(u,v) \quad \text{und} \quad y = y(u,v)$$

zweier neuer Variabler u und v. Ein wichtiges Beispiel, das man zur Veranschaulichung während der folgenden Rechnungen im Kopf behalten sollte, ist die Polarkoordinatensdarstellung

$$x = x(r,\varphi) = r\sin\varphi \quad \text{und} \quad y = y(r,\varphi) = r\cos\varphi\,.$$

Zur Definition des Integrals

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy$$

approximierten wir den Intgegrationsbereich B durch kleine achsenparallele Rechtecke. Wenn wir statt über x und y über u und v integrieren, müssen wir entsprechend den Bereich B', in dem sich diese neuen Variablen bewegen, in achsenparallele Rechtecke zerlegen; dabei fordern wir nun natürlich Parallelität zur u- und zur v-Achse. Wir betrachten ein festes dieser Rechtecke; es habe die Eckpunkte

$$(u_0, v_0), \quad (u_0 + h, v_0), \quad (u_0, v_0 + k) \quad \text{und} \quad (u_0 + h, v_0 + k)$$

und somit den Flächeninhalt hk.

Die Menge der Punkte (x, y), die zu den Punkten (u, v) aus diesem Rechteck gehören, d.h. also die Menge

$$\left\{ \big(x(u,v), y(u,v)\big) \;\middle|\; u_0 \le u \le u_0 + h \quad \text{und} \quad v_0 \le v \le v_0 + k \right\}$$

ist natürlich im allgemeinen kein Rechteck, sondern eine krummlinig begrenzte Figur; im Beispiel der Polarkoordinaten etwa wäre sie ein Winkelbereich zwischen zwei Kreisbögen. (An den bei Polarkoordinaten etwas problematischen Nullpunkt als Ecke denken wir in diesen Zusammenhang lieber nicht; es ist klar, daß sein Einfluß bei immer kleiner werdenden Rechtecken für eine um den Nullpunkt beschränkte Funktion f immer kleiner wird.)

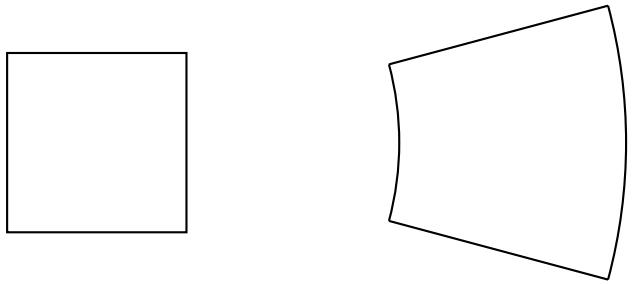

Abb. 67: Rechteck in (r, φ)-Ebene mit Bild in (x, y)-Ebene

Trotzdem machen wir, wenn x und y *differenzierbare* Funktionen von u und v sind, bei kleinen Rechtecken keinen allzu großen Fehler, wenn

wir die transformierte Menge als *Parallelogramm* betrachten, denn nach Definition der Differenzierbarkeit ist

$$\begin{aligned}
x(u_0 + h, v_0) &= x(u_0, v_0) + h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + o(h) \\
y(u_0 + h, v_0) &= y(u_0, v_0) + h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) + o(h) \\
x(u_0, v_0 + k) &= x(u_0, v_0) + k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + o(k) \\
y(u_0, v_0 + k) &= y(u_0, v_0) + k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) + o(k)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x(u_0 + h, v_0 + k) = x(u_0, v_0) &+ h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + o(h) \\
&+ k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + o(k) \\
y(u_0 + h, v_0 + k) = y(u_0, v_0) &+ h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) + o(h) \\
&+ k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) + o(k)\,;
\end{aligned}$$

wenn wir Terme der Größenordnung $o(h)$ und $o(k)$ vernachlässigen, ist die transformierte Menge also ein Parallelogramm mit Kantenvektoren

$$h\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist bekanntlich gleich dem Produkt der Kantenlängen mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels; falls wir die beiden Vektoren in den $\mathbb{R}^3$ einbetten, indem wir ihnen eine Null als dritte Komponente geben, ist das gerade gleich dem Betrag des Vektorprodukts, das hier nur in der dritten Komponenten von null verschieden ist; die Fläche des Parallelogramms ist also

$$hk \cdot \left| \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right|.$$

Der gesamte Integrationsbereich wird approximiert durch die Vereinigung der Parallelogramme zu den sämtlichen Rechtecken, mit denen B'

approximiert wurde; wenn wir also davon ausgehen, daß die Koordinatentransformation zwischen und B und B' bijektiv ist und wenn wir – was eigentlich noch durch genauere Abschätzungen zu rechtfertigen wäre – auch davon ausgehen, daß wir die oben erwähnten Fehler beim Grenzübergang $h \to 0$ und $k \to 0$ vernachlässigen können, erhalten wir die

Transformationsformel: $f\colon B \to \mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion auf $B \subseteq \mathbb{R}^2$, und die Variablen x, y seien als differenzierbare Funktionen $x = x(u,v)$ und $y = y(u,v)$ neuer Variabler u, v dargestellt. Ist dann $B' \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Integrationsbereich, für den die Abbildung

$$B' \to B; \quad (u,v) \mapsto \big(x(u,v),\ y(u,v)\big)$$

bijektiv ist, so gilt

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{B'} f\big(x(u,v)\,y(u,v)\big) \left| \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right| du\,dv\,.$$

Für unbeschränkte Integrationsbereiche stehen hier natürlich uneigentliche Integrale; da diese – so sie existieren – Grenzwerte von üblichen Integralen sind, ist dies kein Problem.

Im Fall

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

der Polarkoordinaten ist

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi \cdot (r\cos\varphi) - (-r\sin\varphi)\cdot\sin\varphi = r\,,$$

d.h.

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{B'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Für diese Formel hätten wir eigentlich nicht den ganzen Apparat der Transformationsformel gebrauch; Abbildung 66 zeigt uns, wie wir die Fläche des Bilds eines Parallelogramms exakt ausrechnen können: Variiert r zwischen r und $r+h$ und φ zwischen φ und $\varphi + k$, so erhalten wir in der (x,y)-Ebene als Bild die Differenz zwischen zwei Kreissektoren mit Öffnungswinkel k und Radius $r+h$ beziehungsweise r; der Flächeninhalt ist also

$$\tfrac{1}{2}k(r+h)^2 - \tfrac{1}{2}kr^2 = r\cdot kh + \tfrac{1}{2}kh^2\,.$$

Wenn h und k simultan gegen null gehen, können wir kh^2 gegenüber kh vernachlässigen, der Flächeninhalt kh des Rechtecks aus der (r,φ)-Ebene wird also im wesentlichen nur mit r multipliziert – genau wie es die obige Rechnung auch zeigt.

Mit dieser Formel können wir beispielsweise noch einmal die Fläche eines Kreises ausrechnen: Die Punkte der Kreisscheibe B mit Radius R um den Nullpunkt haben Polarkoordinaten (r,φ) im Rechteck

$$B' = \big\{(r,\varphi) \;\big|\; 0 \le r \le R \quad \text{und} \quad 0 \le \varphi < 2\pi\big\}\,;$$

die Fläche von B ist also

$$\iint\limits_B dx\,dy = \iint\limits_{B'} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R r\,dr\right)\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\,d\varphi = \pi R^2\,.$$

Im Vergleich zum letzten Abschnitt, wo wir das Integral (für $R=1$) in kartesischen Koordinaten ausrechneten und dazu die Funktion $\sqrt{1-x^2}$ integrieren mußten, ist diese Rechnung erheblich einfacher; die Transformationsformel leistet also genau das, was wir von einer verallgemeinerten Substitutionsregel erwarten: Bei *geschickter,* an das Problem angepaßter Substitution kann sie die Berechnung eines Integrals erheblich vereinfachen.

Als nächstes Beispiel wollen wir endlich einmal ein Integral ausrechnen, bei dem wir das Ergebnis nicht besser und viel einfacher durch elementargeometrische Überlegungen bekommen können: das Integral

$$I \underset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\,.$$

Man kann zeigen, daß die Stammfunktion von e^{-x^2} nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrückbar ist; Integration mittels Stammfunktion ist also zwecklos. Stattdessen benutzen wir folgenden Trick:

Durch Grenzübergang können wir auch auch auf das unendliche „Recht-

eck“ $\mathbb{R}^2$ als Normalbereich auffassen; daher ist

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\right)\,dy$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\cdot I\,dy$$
$$= I\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = I^2\,.$$

In Polarkoordinaten entspricht $\mathbb{R}^2$ dem Bereich $B' = \mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,2\pi)$; also ist das betrachtete Integral nach der Transformationsformel auch gleich

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint\limits_{B'} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\right)\,d\varphi\,.$$

Die Stammfunktion des neuen Integranden re^{-r^2} ist leicht zu finden: Aus

$$\frac{d}{dr}e^{-r^2} = -2re^{-r^2}$$

folgt sofort, daß

$$\int re^{-r^2}\,dr = -\tfrac{1}{2}e^{-r^2} + C\,.$$

Damit können wir weiterrechnen und erhalten das Ergebnis

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\right)\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} -\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}\,d\varphi = \pi.$$

Also ist $I^2 = \pi$ und, da der Integrand von I überall positiv ist, folgt

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Zur Verallgemeinerung der Transformationsformel auf höhere Dimensionen beachten wir zunächst, daß der Term

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

in der Formel

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{B'} f\big(x(u,v)\,y(u,v)\big)\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|\,du\,dv$$

gerade gleich der Determinanten der JACOBI-Matrix

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

des Koordinatenwechsels

$$(u,v)\mapsto\big(x(u,v),\ y(u,v)\big)$$

ist. Diese können wir uns auch geometrisch veranschaulichen, denn sie ist ja gerade der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Kantenvektoren

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}\,.$$

Den Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ können wir auch wie folgt ausrechnen:

Das (kartesische) Koordinatensystem in $\mathbb{R}^2$ sei so gewählt, daß der Vektor $\vec{a}$ ein Vielfaches $a\vec{e}_1$ des ersten Koordinateneinheitsvektors ist. Falls dann auch noch $\vec{b} = b\vec{e}_2$ ein Vielfaches des zweiten sein sollte, falls also das Parallelogramm sogar ein achsenparalleles Rechteck sein sollte, ist dessen Fläche gleich

$$ab = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \det(\vec{a},\vec{b})\,.$$

Im allgemeinen wird das Parallelogramm natürlich kein Rechteck sein; da die Basisvektoren im Gegensatz zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander senkrecht stehen, müssen wir $\vec{b}$ dann als Linearkombination $\vec{b} = c\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ schreiben.

Dabei können wir $b\vec{e}_2$ als Projektion von $\vec{b}$ auf die von $\vec{e}_2$ aufgespannte Koordinatenachse auffassen. Da sich das Parallelogramm durch Scherung in das Rechteck mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $b\vec{e}_2$ überführen läßt und sich der Flächeninhalte bei Scherungen nicht ändern, hat das Parallelogramm immer noch den Flächeninhalt

$$ab = \det \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \det(\vec{a}, \vec{b}) .$$

Beim Übergang zu einem anderen orthonormalen Koordinatensystem werden die Koordinatenachsen gedreht, d.h. sie werden mit einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

multipliziert. Da deren Determinante gleich eins ist, ändert sich dabei nach dem Multiplikationssatz für Determinanten nichts am Wert von $\det(\vec{a}, \vec{b})$. Der Flächeninhalt eines von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist also stets gleich $\det(\vec{a}, \vec{b})$, egal bezüglich welcher Orthonormalbasis die Kantenvektoren dargestellt werden.

Genauso können wir auch in höheren Dimensionen argumentieren: Durch mehrfache Scherung läßt sich ein beliebiges Parallelepiped in einen Quader überführen; das Volumen des von n Kantenvektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ aufgespannten Parallelepipeds ist also gleich

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) .$$

(Für $n = 3$ kennen wir diese Formel bereits, denn wir wissen, daß dort das Volumen gleich dem Spatprodukt $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3$ der drei Vektoren ist, und dieses wiederum ist gleich der Determinanten.)

Damit gilt also im $\mathbb{R}^n$ die

Transformationsformel: $f : B \to \mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion auf $B \subseteq \mathbb{R}^n$, und die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ seien als differenzierbare Funktionen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, \ldots, u_n) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(u_1, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

neuer Variabler $u_1, \ldots, u_n$ dargestellt. Ist dann $B' \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Integrationsbereich, für den die Abbildung

$$B' \to B; \quad \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$$

bijektiv ist, so gilt

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{B'} \cdots \int f\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})\big)\, \big|\det J_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u})\big|\; du_1 \cdots du_n .$$

■

Ausgeschrieben wird die Formel für den $\mathbb{R}^3$, wenn wir kurz

$$F(u, v, w) \underset{\text{def}}{=} f\big(x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w)\big)$$

schreiben, zu

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\iiint_{B'} F(u, v, w) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \right| du\, dv\, dw .$$

Als Beispiel können wir wieder Koordinatensysteme betrachten: Für Kugelkoordinaten ist

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned} ,$$

die JACOBI-Matrix ist also

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix} .$$

Entwicklung nach der dritten Zeile ergibt für die Determinante den Wert

$$\begin{aligned}
&\cos\vartheta \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \end{vmatrix} \\
&- r\sin\vartheta \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta \end{vmatrix} \\
&= -r^2\cos\vartheta(\sin\vartheta\cos\vartheta) - r^2\sin\vartheta\cdot\sin^2\vartheta = -r^2\sin\vartheta\,.
\end{aligned}$$

Der Betrag der Determinanten der JACOBI-Matrix ist also

$$r^2\,|\sin\vartheta|\,,$$

und mit

$$F(r,\varphi,\vartheta) = f(r\cos\varphi\sin\vartheta,\ r\sin\varphi\sin\vartheta,\ r\cos\vartheta)$$

wird die Transformationsformel zu

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{B'} F(r,\varphi,\vartheta)\cdot r^2\,|\sin\vartheta|\ dr\,d\varphi\,d\vartheta\,.$$

Berechnen wir zur Kontrolle schnell noch einmal das Volumen der Kugel B um den Nullpunkt mit Radius R:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B dx\,dy\,dz &= \int\limits_0^\pi \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^R r^2\,|\sin\vartheta|\ dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\
&= \int\limits_0^\pi \left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^3}{3}\,|\sin\vartheta|\ d\varphi \right) d\vartheta = \frac{2\pi R^3}{3} \int\limits_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{4\pi R^3}{3}\,.
\end{aligned}$$

Außer den Kugelkoordinaten hatten wir im $\mathbb{R}^3$ auch noch Zylinderkoordinaten betrachtet; für diese ist

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \\
y &= r\sin\varphi \qquad \text{und} \\
z &= z\,,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

und die Determinante davon ist wie bei den ebenen Polarkoordinaten gleich r. Also haben wir hier im wesentlichen dieselbe Transformationsformel wie bei den ebenen Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten sind schließlich im wesentlichen auch nichts anderes als ebene Polarkoordinaten), nämlich

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{B'} F(r,\varphi,z)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz\,,$$

wobei wieder

$$F(r,\varphi,z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

sein soll.

Genauso lassen sich auch beliebige andere Koordinatensysteme behandeln, beispielsweise könnte man zum Rechnen mit einem Ellipsoid auch Ellipsoidkoordinaten

$$\begin{aligned}
x &= a\cos\varphi\sin\vartheta \\
y &= b\sin\varphi\sin\vartheta \\
z &= c\cos\vartheta
\end{aligned}$$

einführen und damit das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bestimmen. (Die Antwort ist natürlich *(?)* $\frac{4}{3}\pi abc$.)

In Physik und Technik sind noch zahlreiche weitere bewährte Koordinatensysteme im Einsatz, auf die wir hier nicht eingehen können; dank der obigen Transformationsformel kann man immer das benutzen, das der jeweiligen Situation am besten angepaßt ist und mithin am wenigsten Rechnung verlangt.

d) Der Satz von Green und der ebene Satz von Gauß

$B \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Bereich, dessen Rand aus endlich vielen Kurvenstücken bestehe. Dann können wir sowohl über B als auch über dessen Randkurve ∂B integrieren; die beiden Sätze in diesem Abschnitt befassen sich mit der Beziehung zwischen diesen beiden Integrationen.

Im allgemeinen kann man natürlich nicht viel erwarten: Nimmt man aus B eine Kurve γ heraus, ist es bei der Integration einer stetigen Funktion gleichgültig, ob man über B oder über $B \setminus \gamma$ integriert, das Randintegral ändert sich aber um das im allgemeinen nicht verschwindende Kurvenintegral über γ.

Für eine geschlossene Kurve γ dagegen erwarten wir, wenn wir uns von der Anschauung leiten lassen und uns die Kurve als eine Art deformierten Kreis vorstellen, daß sie die Ebene in zwei Bereiche zerlegt: einen beschränkten Bereich B und einen unbeschränkten Bereich B'. Hier sollten sich γ und B gegenseitig so stark beeinflussen, daß eigentlich auch die Integration über B etwas mit der Integration über γ zu tun haben müßte.

Nun ist es natürlich etwas gefährlich, sich *nur* von der Anschauung leiten zu lassen, denn es gibt sicherlich erheblich mehr Kurven, als man sich gemeinhin vorstellt. Beispielsweise gibt es auch Kurven, die wie eine Ziffer 8 aussehen, etwa die Lemniskate, und diese zerlegen die Ebene in *drei* Bereiche. Wir müssen also noch zusätzlich fordern, daß sich die Kurve nicht selbst überkreuzt, aber dann gilt in der Tat

Jordanscher Kurvensatz: γ sei eine geschlossene ebene Kurve ohne Überkreuzungen. Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ zwei Zusammenhangskomponenten, von denen die eine beschränkt und die andere unbeschränkt ist.

Der Beweis dieses anschaulich fast selbstverständlichen Satzes erfordert einen erstaunlich großen Aufwand: Man muß die Ebene in kleine Quadrate (oder Dreiecke oder etwas ähnliches) unterteilen, γ durch Kantenzüge aus deren Seiten annähern, den Satz durch aufwendige Rechnungen mit formalen Summen von Quadraten und Quadratseiten für die angenäherten Kurven beweisen und dann schließlich noch durch ein

Limesargument zeigen, daß die Aussage auch für γ selbst gilt. Die genaue Durchführung dieses Beweises würde etwa drei Vorlesungstermine erfordern – ein Aufwand, der für uns in keinem vernünftigen Zusammenhang mit seinem Nutzen steht: Bei den meisten in der Praxis vorkommenden Kurven wird die Aussage des JORDANschen Kurvensatzes zumindest für diese speziellen Kurven ohnehin klar sein.

MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838–1922) leistete wesentliche Beiträge zur Entwicklung der Topologie und der Gruppentheorie. Er beschäftigte sich auch mit der Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen und stellte in einem vielbeachteten Buch die GALOISsche Theorie über die Nichtlösbarkeit allgemeiner Gleichungen vom Grad größer vier dar. Seine Untersuchungen über endliche Körper führten ihn zu der heute als JORDAN-Zerlegung bekannten Darstellung von Matrizen, mit der wir uns im nächsten Semester beschäftigen werden; außerdem bewies er Satze über die Konvergenz von FOURIER-Reihen.

Um den JORDANschen Kurvensatz zu umgehen, starten wir einfach mit einem Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$, von dem wir all das verlangen, was uns nachher das Leben einfach macht; in der Praxis sollte es (hoffentlich) selten schwierig sein, diese Forderungen für die Bereiche aus konkreten Anwendungen zu verifizieren.

Satz von Green: $B \subset \mathbb{R}^2$ sei eine abgeschlossene Menge, die sowohl als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche vom Typ I wie auch als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche vom Typ II geschrieben werden kann; ihre Randkurve γ sei so orientiert, daß B im Gegenuhrzeigersinn umlaufen wird. Weiter sei $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^2)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $D \supset B$ von $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\int_\gamma \vec{V}\, ds = \iint_B \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx\, dy\,.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst nur ein Vektorfeld $\vec{V} = \binom{V_1}{0}$ mit verschwindender y-Komponente und setzen B als Normalbereich

$$N = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b \quad \text{und} \quad f(x) \le y \le g(x) \right\}$$

voraus. Das Integral über die Randkurve γ berechnen wir am besten komponentenweise:

$$\gamma_1 \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \big(t, f(t)\big)$$

sei die untere Begrenzungskurve,

$$\gamma_2 \colon \big[f(b), g(b)\big] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (b,t)$$

die rechte Randstrecke,

$$\gamma_3 \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \big(t, g(t)\big)$$

die obere Begrenzungskurve, und

$$\gamma_4 \colon \big[f(a), g(a)\big] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \big(a,t\big)$$

schließlich die linke Seitenstrecke.

Dann ist $\dot\gamma_1(t) = \binom{1}{f'(t)}$, also

$$\int\limits_{\gamma_1} \vec V \, ds = \int\limits_a^b \begin{pmatrix} V_1\big(t, f(t)\big) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} dt = \int\limits_a^b V_1\big(t, f(t)\big) \, dt$$

und entsprechend

$$\int\limits_{\gamma_3} \vec V \, ds = \int\limits_a^b \begin{pmatrix} V_1\big(t, g(t)\big) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ g'(t) \end{pmatrix} dt = \int\limits_a^b V_1\big(t, g(t)\big) \, dt \,.$$

Für die beiden Seitenstrecken ist $\dot\gamma_2(t) = \binom{0}{1} = \dot\gamma_4(t) = \binom{0}{1}$, also ist

$$\int\limits_{\gamma_2} \vec V \, ds = \int\limits_{f(a)}^{g(a)} \begin{pmatrix} V_1(a,t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = 0 \,,$$

und genauso folgt auch das Verschwinden des Integrals über γ_4.

Wenn wir im Gegenuhrzeigersinn um N herum integrieren, werden die Kurvenstücke γ_3 und γ_4 rückwärts durchlaufen, also ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma} \vec V \, ds &= \int\limits_{\gamma_1} \vec V \, ds + \int\limits_{\gamma_2} \vec V \, ds - \int\limits_{\gamma_3} \vec V \, ds - \int\limits_{\gamma_4} \vec V \, ds \\ &= \int\limits_a^b V_1\big(t, f(t)\big) \, dt - \int\limits_a^b V_1\big(t, g(t)\big) \, dt \\ &= \int\limits_a^b \Big(V_1\big(t, f(t)\big) - V_1\big(t, g(t)\big) \Big) \, dt \,. \end{aligned}$$

Da N Normalbereich vom Typ I ist, können wir auch das Flächenintegral über N leicht ausrechnen:

$$\iint\limits_N \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint\limits_N -\frac{\partial V_1}{\partial y} \, dx\, dy$$

$$= -\int\limits_a^b \left(\int\limits_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial V_1}{\partial y} \, dy \right) dx = \int\limits_a^b \Big(V_1\big(x, g(x)\big) - V_1\big(x, f(x)\big) \Big) \, dx \,.$$

Zumindest für das hier betrachtete spezielle Vektorfeld V ohne y-Komponente und einen Normalbereich vom Typ I ist der Satz also richtig.

Damit gilt er aber zumindest für dieses spezielle Vektorfeld auch für jeden Bereich B, der sich in Normalbereiche vom Typ I zerlegen läßt: Das Flächenintegral über B ist gleich der Summe der Flächenintegrale über die Normalbereiche vom Typ I, in die wir B zerlegt haben und somit problemlos. Die Randkurve von B besteht einerseits aus Kurvenstücken, die auch zum Rand von B gehören, andererseits aus solchen, die durch die Zerlegung eingeführt wurden und zwei Normalbereiche voneinander trennen. Letztere werden aber als Randkurven der beiden angrenzenden Normalkurven jeweils in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so daß sich die Integrale längs solcher Kurvenstücke gegenseitig wegheben. Summiert man also die Integrale über die Ränder aller Normalbereiche

auf, bleiben am Ende nur die Integrale längs jener Kurvenstücke übrig, die auf der Randkurve von B liegen, die Summe ist somit gleich dem Integral über die Randkurve.

Damit ist der Satz bewiesen für alle Vektorfelder $\vec{V}$ mit verschwindender y-Komponente.

Als nächstes beweisen wir ihn für Vektorfelder $\vec{V}$ mit verschwindender x-Komponente; wenn man mit Normbereichen vom Typ II argumentiert statt mit solchen vom Typ I, kann man dazu die obigen Argumente fast wörtlich wiederholen.

Der Rest des Beweises ist nun einfach: Ein beliebiges Vektorfeld $\vec{V}$ läßt sich als Summe

$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} V_1(x,y) \\ V_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ V_2(x,y) \end{pmatrix}$$

schreiben, und der Satz gilt für beide Summanden. Da beide Seiten der Behauptung linear in $\vec{V}$ sind, folgt der Satz auch für $\vec{V}$ selbst. ∎

GEORGE GREEN (1793–1841) war der Sohn eines Bäckers aus Nottingham. Er besuchte nur von 1801 bis 1802 eine Schule, danach arbeitete er in der Bäckerei und später in der dazugekauften Mühle. Es ist nicht bekannt, wann und wie er Mathematik lernte. 1827 veröffentlichte er sein Buch *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism,* von dem 51 Exemplare verkauft wurden, größtenteils in Nottingham selbst. Einer der Leser stellte Kontakte zur Cambridge Philosophical Society und zur Royal Academy in Edinburgh her, so daß GREENs weitere Arbeiten (über Elektrizität und über Hydrodynamik) dort veröffentlicht wurden. 1833 begann er mit dem Studium der Mathematik an der Universität Cambridge; nach dessen Abschluß blieb er in Cambridge, bis er 1840 wegen gesundheitlicher Probleme nach Nottingham zurückkehrte. Weder GREEN selbst noch seine Zeitgenossen erkannten die Bedeutung seiner Arbeiten, die, in heutiger Sprechweise, Potentialfunktionen einführten und für die Physik nutzbar machten. Auf dieser Grundlage bauten später JAMES CLERK MAXWELL (1831–1879) und andere die Elektrodynamik auf.

Wenn wir für $\vec{V}$ speziell ein Vektorfeld der Form

$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} -\Phi_y(x,y) \\ \Phi_x(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Phi \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$$

einsetzen, erhalten wir für das Flächenintegral

$$\iint_B \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_B (\Phi_{xx} + \Phi_{yy})\,dx\,dy = \iint_B \Delta\Phi\,dx\,dy\,,$$

wobei Δ wie üblich den LAPLACE-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

bezeichnet.

Das Integral über die Randkurve $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ wird zu

$$\begin{aligned} &\int_\gamma \begin{pmatrix} -\Phi_y\big(\gamma(t)\big) \\ \Phi_x\big(\gamma(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \dot\gamma_2(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_\gamma \Big(-\Phi_y\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma_1(t) + \Phi_x\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma_2(t) \Big)\, dt \\ &= \int_\gamma \begin{pmatrix} \Phi_x\big(\gamma(t)\big) \\ \Phi_y\big(\gamma(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} dt\,. \end{aligned}$$

Der erste Vektor im Integranden der dritten Zeile ist einfach der Gradient von Φ. Der zweite Vektor hat Skalarprodukt null mit dem Tangentenvektor $\dot\gamma(t) = \binom{\dot\gamma_1(t)}{\dot\gamma_2(t)}$, steht also auf diesem senkrecht und ist somit ein *Normalenvektor.* Das Skalarprodukt des Gradienten einer Funktion mit einem Vektor ist bekanntlich die *Richtungsableitung* der Funktion in Richtung dieses Vektors; mit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \operatorname{grad}$$

erhalten wir somit den

Satz von Gauß (ebener Fall)**:** Für B, D und γ wie im Satz von GREEN und $\Phi \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\iint_B \Delta\Phi\; dx\,dy = \int_\gamma \partial_{\vec{n}}\Phi\; ds\,.$$

■

Mit einer Verallgemeinerung sowie auch mit der anschaulichen Interpretation dieses Satzes werden wir uns in Abschnitt *f)* noch genauer befassen.

e) Oberflächenintegrale

Im dreidimensionalen Fall wird der Satz von GAUSS, wie die meisten wohl bereits aus der Physik wissen, ein Volumenintegral mit dem Fluß durch eine Oberfläche in Verbindung bringen. Was Volumenintegrale sind, haben wir inzwischen auch hier definiert; in diesem Abschnitt geht es um den Begriff des Oberflächenintegrals, um den Fluß eines Vektorfelds durch eine Oberfläche und um verwandte Themen.

Die Vorgehensweise bei der Definition eines Oberflächenintegrals entspricht genau der bei der Definition des Kurvenintegrals: Dort hatten wir Kurvenstücke als Funktionen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definiert; hier definieren wir entsprechend *Flächenstücke* durch Funktionen zweier Parameter. Wir müssen dabei allerdings etwas sorgfältiger vorgehen, denn im Vergleich zum Kurvenfall ist die Situation zumindest in zweierlei Hinsicht komplexer: Erstens gibt es auf der reellen Geraden im wesentlichen nur eine Art von zusammenhängenden Teilmengen, nämlich die Intervalle. In der Ebenen gibt es erheblich mehr Möglichkeiten – aber damit hatten wir uns ja schon bei der Definition von Flächen- und Volumenintegralen beschäftigt. Zweitens mußten wir bei Kurven nur fordern, daß $\dot\gamma(t)$ nirgends verschwindet, um die Existenz eines Tangentenvektors zu garantieren. Hier im Zweidimensionalen recht das nicht mehr: Ein Flächenstück hat in jedem Punkt Anspruch nicht nur auf eine Tangente, sondern auf eine ganze *Tangentialebene;* wir müssen also sicherstellen, daß es in jedem Punkt mindestens zwei linear unabhängige Tangentenvektoren gibt.

Die dazu notwendigen Definitionen kann man problemlos für Flächenstücke in jedem $\mathbb{R}^n$ hinschreiben; wir wollen uns aber, da dies für alle hier betrachteten Anwendungen ausreicht, auf den etwas anschaulicheren Fall von Flächenstücken im $\mathbb{R}^3$ beschränken.

Ein Flächenstück soll demnach gegeben sein durch eine Funktion

$$f\colon B \to \mathbb{R}^3; \quad (u,v) \mapsto f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

auf einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$; mit Blick auf unsere Erfahrungen bei Kurvenstücken wollen wir von vornherein fordern, daß f differenzierbar sein soll in einer offenen Umgebung von B. Für kleine reelle Zahlen h, k ist dann für einen Punkt $(u_0, v_0) \in B$

$$f(u_0+h, v_0+k) = f(u_0,v_0) + f_u(u_0,v_0)\cdot h + f_v(u_0,v_0)\cdot k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right).$$

Da hier nur h und k variabel sind, bedeutet die Forderung nach zwei linear unabhängigen Tangentialvektoren, daß die beiden Vektoren $f_u(u_0,v_0)$ und $f_v(u_0,v_0)$ in allen Punkten $(u_0,v_0) \in B$ linear unabhängig sein müssen.

An dieser Stelle führt die Beschränkung auf den $\mathbb{R}^3$ zu einer kleinen Vereinfachung: Im $\mathbb{R}^3$, und nur dort, existiert ein Vektorprodukt; zwei Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn dieses Vektorprodukt ungleich dem Nullvektor ist. Sowohl der Betrag als auch die Richtung dieses Vektors werden uns schon bald in mehrfacher Hinsicht nützlich sein; wir definieren daher

Definition: Ein reguläres Flächenstück im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch einen Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ und eine in einer offenen Menge $D \supseteq B$ differenzierbaren Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^3; \quad (u,v) \mapsto f(u,v)$, für die gilt:
1.) Die Einschränkung $f_{|B}$ von f auf B ist injektiv.
2.) In jedem Punkt $(u_0,v_0) \in B$ ist $f_u(u_0,v_0) \times f_v(u_0,v_0) \neq \vec{0}$.

Die wichtigste Oberfläche, mit der wir es im folgenden zu tun haben werden, ist die der Kugel. Die Oberfläche einer Kugel vom Radius R hat in Kugelkoordinaten die Gleichung $r = R$ mit beliebigen Winkelkoordinaten φ und ϑ, sie ist also (in kartesischen Kordinaten) gegeben durch die Funktion

$$f\colon [0,2\pi) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3; \quad (\varphi,\vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\vartheta \\ R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Differenzierbarkeit ist hier überhaupt kein Problem: Die angegebene Funktion ist sogar auf ganz $\mathbb{R}^2$ beliebig oft stetig differenzierbar.

Bei der Injektivität gibt es allerdings Probleme: Für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ ist $\sin\vartheta = 0$; daher werden alle Parameterpaare $(\varphi, 0)$ auf $(0, 0, R)$ und aller Parameterpaare (φ, π) auf $(0, 0, -R)$ abgebildet.

Das ist aber glücklicherweise auch bereits alles was passieren kann, denn falls $\sin\vartheta \neq 0$ ist, können wir aus der dritten Komponenten $R\cos\vartheta$ den Winkel $\vartheta \in [0, \pi]$ eindeutig bestimmen. Damit kennen wir auch $R\sin\vartheta$ und bekommen aus den ersten beiden Komponenten von f den Cosinus und den Sinus von φ, wodurch $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig festgelegt ist.

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

also ist

$$f_\varphi \times f_\vartheta = \begin{pmatrix} R^2\cos\varphi\sin^2\vartheta \\ R^2\sin\varphi\sin^2\vartheta \\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} = R\sin\vartheta \cdot f(\varphi, \vartheta)\,.$$

Da für eine echte Kugel $R > 0$ sein muß und $f(\varphi, \vartheta)$ die Länge R hat, ist dieser Vektor genau dann gleich dem Nullvektor, wenn $\sin\vartheta = 0$ ist; wie bei der Injektivität gibt es also wieder Probleme an den Polen, aber auch nur dort.

Somit können wir die Kugel nur dann als reguläres Flächenstück auffassen, wenn wir die beiden Pole herausnehmen, d.h. wenn wir uns auf den Parameterbereich $[0, 2\pi) \times (0, \pi)$ beschränken.

Für die meisten praktischen Zwecke ist das natürlich völlig unproblematisch: Bei der Flächenbestimmung oder allgemeiner der Integration einer beschränkte Funktion sind einzelne, isoliert liegende Punkte irrelevant. Lediglich im Falle von uneigentlichen Integranden muß man hier sehr vorsichtig sein; hier in dieser Vorlesung sollen entsprechende Integrale deshalb vorsichtshalber gleich gar nicht erst definiert werden.

Nachdem wir nun wissen, was ein reguläres Flächenstück ist, müssen wir als nächstes lernen, damit zu rechnen. Bevor wir uns an die Bestimmung von Flächeninhalten machen, ist es vielleicht ganz nützlich (wenn auch nicht unbedingt notwendig), daß wir uns ein paar Gedanken über die *Längenmessung* machen.

Längen sind Eigenschaften von Kurven; wir müssen also eine Kurve oder – da wir Längen auch stückweise aneinandersetzen können – einfacher ein Kurvenstück auf einem Flächenstück betrachten. Genau wie man etwa bei der Navigation auf der Erde nicht von einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem ausgeht, sondern von der geographischen Länge und Breite, empfiehlt es sich auch hier, Kurven über die Parameter des Flächenstücks zu definieren – und sei es auch nur, um sicher zu sein, daß die Kurve auch wirklich auf dem Flächenstück liegt.

Wir beschreiben eine Kurve auf einem Flächenstück $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ daher durch eine Funktion

$$\delta\colon [a, b] \to B; \quad t \mapsto \big(u(t), v(t)\big)\,;$$

die eigentliche Kurve im $\mathbb{R}^3$ wird dann beschrieben durch die zusammengesetzte Abbildung

$$\gamma = f \circ \delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto f\big(u(t), v(t)\big)\,.$$

Wir wollen natürlich, daß diese Kurve immer dieselbe Länge hat, egal ob wir sie einfach so im $\mathbb{R}^3$ oder auf einem Flächenstück betrachten. Die Länge des Kurvenstücks γ auf dem Flächenstück f ist daher gleich der bekannten Länge des Kurvenstücks γ im $\mathbb{R}^3$, also

$$\int_a^b |\dot\gamma(t)|\; dt = \int_a^b \left| f_u\big(u(t), v(t)\big)\frac{du}{dt} + f_v\big(u(t), v(t)\big)\frac{dv}{dt} \right| dt\,.$$

Der Betrag des Vektors $f_u\big(u(t), v(t)\big)\frac{du}{dt} + f_v\big(u(t), v(t)\big)\frac{dv}{dt}$ ist gleich der Wurzel aus dem Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst, also der

Wurzel aus

$$f_u\big(u(t),v(t)\big)^2\left(\frac{du}{dt}(t)\right)^2 + 2f_u\big(u(t),v(t)\big)\cdot f_v\big(u(t),v(t)\big)\left(\frac{du}{dt}(t)\right)\left(\frac{dv}{dt}(t)\right) + f_v\big(u(t),v(t)\big)^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 .$$

In dieser Formel können wir zwei Arten von Termen unterscheiden: Rechts stehen jeweils die Ableitungen von u und v nach t; diese hängen nur von der jeweiligen Kurve ab, die ja gerade durch die Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ definiert ist. Links dagegen stehen Ausdrücke in den partiellen Ableitungen von f nach u und v; diese sind Funktionen auf dem Flächenstück und sind insbesondere unabhängig von jeder Kurve. Wir bezeichnen daher diese drei letzteren Größen

$$E(u,v) = f_u(u,v)\cdot f_u(u,v)\,,$$
$$F(u,v) = f_u(u,v)\cdot f_v(u,v) \quad \text{und}$$
$$G(u,v) = f_v(u,v)\cdot f_v(u,v)$$

als *Fundamentalgrößen* des Flächenstücks f.

Um etwas Übung im Umgang mit diesen Größen zu bekommen, wollen wir sie für die Kugeloberfläche in ihrer oben angegebenen Parametrisierung berechnen. Hier ist, wie wir schon wissen,

$$f_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix} ;$$

also ist

$$E(\varphi,\vartheta) = R^2(\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^2\varphi\sin^2\vartheta) = R^2\sin^2\vartheta$$
$$F(\varphi,\vartheta) = R^2(-\sin\varphi\sin\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta) = 0$$
$$G(\varphi,\vartheta) = R^2(\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = R^2 .$$

Dieses Ergebnis sollte man auch geometrisch interpretieren: Das Verschwinden von F, die Orthogonalität von f_φ und f_ϑ also, bedeutet,

daß die Längenkreise und die Breitenkreise in jedem Punkt der Kugel (außer den beiden Polen) aufeinander senkrecht stehen; die Konstans von G kommt daher, daß alle Längenkreise gleich lang sind, und die ϑ-Abhängigkeit von E schließlich reflektiert die Tatsache, daß die Breitenkreise verschiedene Radien haben.

Allgemein kann man die Länge einer Kurve auf einem Flächenstück somit als Integral

$$\int_a^b \sqrt{E\,\dot u^2 + 2F\,\dot u\dot v + G\,\dot v^2}\,dt$$

berechnen; dem interessierten Leser sei empfohlen, damit beispielsweise überprüfen, daß Breitenkreise i.a. nicht die kürzeste Verbindung zwischen zweien ihrer Punkte sind, sondern daß der Kreis um den Kugelmittelpunkt durch diese beiden Punkte (der sogenannte Großkreis) eine kürzere Verbindungskurve liefert.

Unser Hauptziel hier sind allerdings nicht Längenberechnungen, sondern die Berechnung von Oberflächen *bzw.* von Flüssen von Vektorfeldern durch diese Oberflächen. Dabei gehen wir genauso vor, wie bei der Transformationsformel im vorigen Abschnitt: Wir unterteilen den Parameterbereich B durch Rechtecke, und betrachten deren Bilder auf dem Flächenstück. Diese sind, da wir f als differenzierbar vorausgesetzt haben, in erster Näherung Parallelogramme, wobei die Näherung bei zunehmender Verfeinerung des Rechteckgitters auf B immer besser wird. Der Flächeninhalt eines solchen Parallelogramms mit Kantenvektoren $f_u\cdot h$ und $f_v\cdot k$ ist

$$hk\cdot|f_u\times f_v|\,,$$

also sollte die Fläche des Flächenstücks gleich

$$\iint_B |f_u\times f_v|\,du\,dv$$

sein, und genau das definieren wir auch als den Flächeninhalt eines Flächenstücks.

Definition: Der Flächeninhalt eines Flächenstücks $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\iint\limits_f dO \underset{\text{def}}{=} \iint\limits_B |f_u \times f_v| \; du\, dv \; .$$

(Das O in dO soll dabei an Oberfläche erinnern.)

Zur Kontrolle, ob diese Definition sinnvoll sein kann, berechnen wir die Oberfläche der Kugel: Hier ist, wie wir bereits wissen,

$$f_\varphi \times f_\vartheta = \begin{pmatrix} R^2 \cos\varphi \sin^2\vartheta \\ R^2 \sin\varphi \sin^2\vartheta \\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} = R \sin\vartheta \cdot f(\varphi,\vartheta) \, ;$$

die Länge dieses Vektors ist also, da $f(\varphi,\vartheta)$ als Radiusvektor natürlich die Länge R haben muß, gleich $R^2 \sin\vartheta$. Die Oberfläche der Kugel berechnet sich daher zu

$$\begin{aligned} \iint\limits_B R^2 \sin\vartheta &= \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{\pi} R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi \\ &= 2\pi \cdot R^2 \cdot (-\cos\pi + \cos 0) = 4\pi R^2 \; , \end{aligned}$$

womit wir uns wieder einmal in hundertprozentiger Übereinstimmung mit der Schulmathematik befinden.

Genau wie Kurvenintegrale sind auch Oberflächenintegrale unabhängig von der Parametrisierung des Flächenstücks; im wesentlichen geht alles genau wie bei den Kurvenintegralen, ist aber etwas aufwendiger. Der Vollständigkeit halber sei die entsprechende Aussagen samt Beweis im Kleindruck abgedruckt:

Lemma: $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon B' \to \mathbb{R}^3$ seien zwei Flächenstücke, für die es eine in einer Umgebung von B stetig differenzierbare Funktion φ gebe, die B bijektiv auf B' abbildet derart, daß $g = f \circ \varphi$ ist. Dann ist

$$\iint\limits_f du\, dv = \iint\limits_g du\, dv \; .$$

Beweis: Nach Definition ist

$$\iint\limits_f dO = \iint\limits_B |f_u \times f_v| \; du\, dv \quad \text{und} \quad \iint\limits_g dO = \iint\limits_B |g_u \times g_v| \; du\, dv \; .$$

Wenn wir die drei Komponenten von f *bzw.* g mit $f^{(x)}, f^{(y)}, f^{(z)}$ *bzw.* $g^{(x)}, g^{(y)}, g^{(z)}$ bezeichnen, ist

$$f_u \times f_v = \begin{pmatrix} f_u^{(y)} f_v^{(z)} - f_u^{(z)} f_v^{(y)} \\ f_u^{(z)} f_v^{(x)} - f_u^{(x)} f_v^{(z)} \\ f_u^{(x)} f_v^{(y)} - f_u^{(y)} f_v^{(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} f_u^{(y)} & f_v^{(y)} \\ f_u^{(z)} & f_v^{(z)} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} f_u^{(z)} & f_v^{(z)} \\ f_u^{(x)} & f_v^{(x)} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} f_u^{(x)} & f_v^{(x)} \\ f_u^{(y)} & f_v^{(y)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \; ,$$

und genau entsprechend natürlich auch für g. Die links stehenden Determinanten sind offensichtlich gerade die Determinaten der JACOBI-Matrizen der verschiedenen zweidimensionalen Projektionen von f; an der ersten Stelle etwa die der Funktion

$$f^{(yz)} \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f^{(y)} \\ f^{(z)} \end{pmatrix} : B \to \mathbb{R}^2 \; .$$

Analog dazu definieren wir auch Funktionen $f^{(zx)}, f^{(xy)}$ und die entsprechenden Funktionen für g.

Aus $g = f \circ \varphi$ folgt, daß auch $g^{(x)} = f^{(x)} \circ \varphi$ und entsprechend für die anderen Komponenten. Damit ist auch $f^{(yz)} = g^{(yz)} \circ \varphi$ *usw.*

Nach der zweidimensionalen Kettenregel ist dann

$$J_{g^{(yz)}} = \left(J_{f^{(yz)}} \circ \varphi \right) \cdot J_\varphi \; ,$$

also ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} g_u^{(y)} & g_v^{(y)} \\ g_u^{(z)} & g_v^{(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u^{(y)} \circ \varphi & f_v^{(y)} \circ \varphi \\ f_u^{(z)} \circ \varphi & f_v^{(z)} \circ \varphi \end{pmatrix} \cdot J_\varphi \; .$$

Entsprechendes gilt auch für die anderen Indexkombinationen, und nach dem Multiplikationssatz für Determinanten gilt eine entsprechende Produktbeziehung auch für die Determinaten der hier stehenden Matrizen; insgesamt erhalten wir also, daß

$$g_u \times g_v = \left((f_u \circ \varphi) \times (f_v \circ \varphi) \right) \cdot \det J_\varphi$$

ist und dementsprechend

$$|g_u \times g_v| = \left((f_u \circ \varphi) \times (f_v \circ \varphi) \right) \cdot |\det J_\varphi| \; .$$

Damit folgt die Behauptung aus der Transformationsformel. ∎

Die Berechnung von Vektorprodukten ist etwas umständlich und sehr anfällig für Vorzeichenfehler; wir wollen daher sehen, daß die Fundamentalgrößen einer Fläche ihrem Namen gerecht werden und uns auch diese Berechnung abnehmen können: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich dem Produkt der Längen

der beiden Vektoren mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels α. Das Quadrat des Flächeninhalts ist also

$$(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})\sin^2\alpha = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})(1-\cos^2\alpha)$$
$$= (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})\cos^2\alpha = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2\,,$$

und der Flächeninhalt selbst somit

$$\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\,.$$

Wir interessieren uns für das Parallelogramm mit Kantenvektoren $h\cdot f_u$ und $k\cdot f_v$; hier wird diese Formel zu

$$hk\cdot\sqrt{(f_u\cdot f_u)(f_v\cdot f_v) - (f_u\cdot f_v)^2} = hk\sqrt{EG-F^2}\,.$$

Die Fläche eines Flächenstücks kann also auch berechnet werden als

$$\iint\limits_B \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\,.$$

Im konkreten Fall steht hier natürlich genau dasselbe Integral wie bei der Formel mit dem Betrag des Vektorprodukts, allerdings erfordert diese Formel, sofern man die Fundamentalgrößen einer Fläche bereits kennt, deutlich weniger Rechenaufwand. Dem Leser sei empfohlen, sich am Beispiel der Kugeloberfläche hiervon zu überzeugen!

Obwohl wir uns auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ beschränken wollen, sei hier zumindest kurz darauf hingewiesen, daß wir bei der Herleitung dieser neuen Darstellung des Flächeninhalts nirgends benutzen mußten, daß wir im $\mathbb{R}^3$ sind; diese Formel gilt also auch für Flächenstücke im $\mathbb{R}^n$ mit $n>3$.

Eine für uns wichtige Besonderheit, die *nur* im $\mathbb{R}^3$ gilt, ist dagegen die Tatsache, daß wir jedem Flächenstück eine eindeutig bestimmte Normalenrichtung zuordnen können: Im Dreidimensionalen gibt es nur eine Richtung, die auf der Tangentialebenen eines Flächenstücks senkrecht steht; in Dimension $n>3$ gibt es dagegen einen ganzen $(n-2)$-dimensionalen Raum mit dieser Eigenschaft.

Wenn wir von der Parameterdarstellung $f\colon D\to B$ eines regulären Flächenstücks im $\mathbb{R}^3$ und einer festen Reihenfolge der Parameter ausgehen, können wir sogar unterscheiden, nach welcher Seite diese Richtung

sich von der Fläche entfernt: Die Tangentialebene wird aufgespannt von den partiellen Ableitungen f_u und f_v von f nach den beiden Parametern u,v auf $D\subseteq\mathbb{R}^2$, und das Kreuzprodukt $f_u\times f_v$ liefert einen Vektor, der auf diesen beiden Tangentialvektoren und somit der gesamten Tangentialebenen senkrecht steht.

Damit können wir jedem Punkt eines *regulären* Flächenstücks eine eindeutig bestimmte Normalenrichtung zuordnen. Man beachte, daß dies nur möglich ist aufgrund der Forderungen, die wir an ein reguläres Flächenstück gestellt haben: Die Abbildung f muß injektiv sein, so daß die Parameterwerte (u,v) zu jedem Punkt des Flächenstücks eindeutig bestimmt sind, und $f_u\times f_v$ darf nirgends verschwinden, da der Nullvektor keine wohlbestimmte Richtung hat.

Typisches Beispiel eines nichtregulären Flächenstücks ist das MÖBIUS-Band

$$f\colon D=[0,1]\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^3;\quad (u,v)\mapsto\begin{pmatrix}(2+u\cos v)\cos 2v\\(2+u\cos v)\sin 2v\\u\sin v\end{pmatrix}\,,$$

das durch Zusammenkleben der Enden eines einmal verdrillten rechteckigen Streifens entsteht. Hier ist f für $u=0$ nicht injektiv, denn $f(0,v)=f(0,v+\pi)$; wir haben also kein reguläres Flächenstück. In der Tat wir für die Parameterwerte $(0,v)$ der Mittelkreis des Bandes zweimal durchlaufen. Dort ist

$$f_u(0,v)=\begin{pmatrix}\cos v\cos 2v\\\cos v\sin 2v\\\sin v\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad f_v(0,v)=\begin{pmatrix}-4\sin 2v\\4\cos 2v\\0\end{pmatrix}\,,$$

also

$$f_u(0,v)\times f_v(0,v)=\begin{pmatrix}-4\sin v\cos 2v\\-4\sin v\sin 2v\\4\cos v\end{pmatrix}$$

und damit

$$f_u(0,v)\times f_v(0,v) = -f_u(0,v+\pi)\times f_v(0,v+\pi)\,.$$

es gibt also auf dem Mittelkreis keine eindeutig bestimmte Normalenrichtung.

Für Kurven hatten wir einerseits RIEMANN-STIELTJES-Integrale definiert, die für eine beliebige Funktion auf der Kurve erklärt sind und in deren Definition die Länge des Tangentenvektors eingeht; andererseits hatten wir Integrale über Vektorfelder, in deren Definition der Tangentenvektor selbst einging. Genauso gehen wir auch hier bei den Oberflächenintegralen vor, nur daß wir jetzt den Normalenvektor anstelle des Tangentenvektors benutzen:

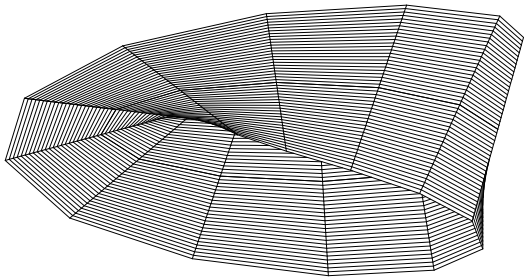

Abb. 51: Das Möbiusband

Definition: $f: D \to \mathbb{R}^3$ sei ein reguläres Flächenstück.
a) Ist g eine auf $f(D)$ definierte stetige Funktion, so bezeichnen wir

$$\iint\limits_f g\, dO \underset{\text{def}}{=} \iint\limits_D g\big(f(u,v)\big)\ \left|f_u(u,v) \times f_v(u,v)\right| du\, dv$$

als *Oberflächenintegral* von g über f.
b) Ist $\vec{V}$ ein in einer Umgebung von $f(D)$ definiertes Vektorfeld, so bezeichnen wir

$$\iint\limits_f \vec{V} \cdot d\vec{O} \underset{\text{def}}{=} \iint\limits_D \vec{V}\big(f(u,v)\big) \cdot \big(f_u(u,v) \times f_v(u,v)\big)\, du\, dv$$

als den *Fluß* des Vektorfelds $\vec{V}$ durch die Oberfläche f.

Eine unproblematische Verallgemeinerung des obigen Lemmas zeigt, daß auch diese Integrale im dort definierten Sinne unabhängig von der Parametrisierung sind.

Der Name *Fluß* für das unter *b)* definierte Integral wird klar, wenn man sich f etwa als eine Kugeloberfläche vorstellt. In jedem Punkt $\boldsymbol{x}$ auf dieser Oberfläche kann man ein kartesisches Koordinatensystem aus einem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_{\boldsymbol{x}}$ und zwei Tangenteneinheitsvektoren

verankern. Drückt man nun den Vektor $\vec{V}(\boldsymbol{x})$ in diesem Koordinatensystem aus, so beschreibt die $\vec{n}_{\boldsymbol{x}}$-Komponente jenen Teil des Vektors, der durch die Kugeloberfläche hindurch nach innen oder außen geht (welches von beiden hängt ab vom Vorzeichen der Komponente und von der Orientierung des Normaleneinheitsvektors), während die beiden anderen Komponenten den Teil beschreiben, der auf der Oberfläche bleibt, also sozusagen den Fluß *auf* der Oberfläche im Gegensatz zum Fluß *durch* die Oberfläche. Letzterer läßt sich berechnen als das Skalarprodukt $\vec{V}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{n}_x$ mit dem Normaleneinheitsvektor, und das Integral über diese Funktion ist

$$\iint\limits_f \big(\vec{V} \cdot \vec{n}_{\boldsymbol{x}}\big)\, dO = \iint\limits_f \vec{V} \cdot d\vec{O}\,,$$

denn

$$f_u \times f_v = \left|f_u \times f_v\right| \vec{n}_{\boldsymbol{x}}\,.$$

f) Die Sätze von Stokes und Gauß

In diesem Abschnitt geht es um drei der zentralsten Sätze der mehrdimensionalen Analysis: Außer den beiden im Titel erwähnten Sätzen soll noch das mehrdimensionale Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bewiesen werden.

Wir beginnen mit letzterem sowie dem Satz von STOKES: Bei beiden geht es darum, die Zirkulation eines Vektorfelds zu bestimmen. Beide Sätze gelten in beliebiger Dimension, jedoch wollen wir sie der Einfachheit halber nur für den $\mathbb{R}^3$ beweisen.

Ausgangspunkt ist ein reguläres Flächenstück $f: D \to \mathbb{R}^3$; dessen Bild $B = f(D)$, das „eigentliche“ geometrische Flächenstück also, sei beschränkt und habe eine reguläre Kurve $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ als Rand. Wie schon mehrfach erwähnt, wollen wir Kurvenintegrale längs γ mit Oberflächenintegralen über f oder – wie wir wegen der Parameterunabhängigkeit auch einigermaßen korrekt sagen können – B in Verbindung bringen.

Wir gehen also aus von einem Vektorfeld $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$, dessen (offener) Definitionsbereich G sowohl B als auch γ enthält, und wollen Informa-

tionen über das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{V}\, ds\,.$$

Dazu approximieren wir B durch ein Flächenstück B^*, das wir aus endlich vielen ungefähr rechteckförmigen Teilmengen R_i zusammensetzen können; ein grobes Bild einer solchen Unterteilung ist in Abbildung 69 zu sehen.

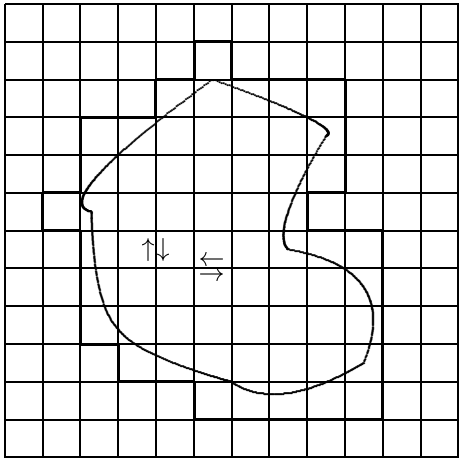

Abb. 69: Unterteilung eines Bereichs

Da f als reguläres Flächenstück vorausgesetzt war, ist überall in B ein wohldefinierter Normalenvektor bestimmt; damit können wir auch für jedes der Rechtecke einen Umlaufsinn festlegen: Dieser soll, wenn man von der Spitze des Normalenvektors aus auf des Rechteck schaut, der Gegenuhrzeigersinn sein. Da der Normalenvektor eines regulären Flächenstücks stetig von den Parametern der Fläche abhängt und nirgends verschwindet, ist es gleichgültig, über welchem Punkt eines (hinreichend kleinen) Rechtecks wir ihn betrachten.

In Abbildung 68 wurde davon ausgegangen, daß alle Normalenvektoren nach oben zeigen; der entsprechende Umlaufsinn ist für einige der

Rechteckkanten eingezeichnet. Wie man sieht, wird jede gemeinsame Kante zweier benachbarter Rechtecke von diesen beiden Rechtecken in verschiedener Weise orientiert. Falls wir daher für jedes Rechteck R_i das Wegintegral entlang seines Rands berechnen und alle diese Integrale aufaddieren, bleiben nur die Integrale längs der in Abbildung 68 fett ausgezogenen Kanten erhalten, d.h.

$$\sum_{i=1}^{M} \int_{\partial R_i} \vec{V}\, ds = \int_{\partial B^*} \vec{V}\, ds\,,$$

wobei M die Anzahl der „Rechtecke“ R_i bezeichnet. Natürlich ist erst recht für jede Funktion h auf B^*

$$\sum_{i=1}^{M} \iint_{R_i} h\, dO = \iint_{B^*} h\, dO\,,$$

wenn wir eine Formel für die einzelnen Rechtecke R_i haben, gilt diese also automatisch auch für B^* und somit, nach einem Grenzübergang, auch für B.

Betrachten wir also ein festes Rechteck R_i und das Kurvenintegral entlang seines Umfangs. Da wir die Rechtecke als klein voraussetzen, können wir $\vec{V}(\boldsymbol{x})$ auf R_i ohne großen Fehler linearisieren.

Dazu sei $\boldsymbol{x}_i \in R_i$ ein beliebiger Punkt des Rechtecks. Ein beliebiger Punkt $\boldsymbol{x} \in R_i$ hat dann die Form $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i + \vec{h}$ mit einem nicht allzu großen Vektor $\vec{h}$. Nach Definition der Differenzierbarkeit ist dann

$$\begin{aligned}\vec{V}(\boldsymbol{x}) &= \vec{V}(\boldsymbol{x}_0 + \vec{h}) = \vec{V}(x_0) + J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x}_0)\vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)\\ &= \vec{V}(\boldsymbol{x}_0) + S \cdot \vec{h} + \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{V}(\boldsymbol{x}_0) \times h + o\big(|\vec{h}|\big)\,,\end{aligned}$$

wobei S für den symmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix $J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x}_0)$ steht.

Wenn wir den Term $o\big(|\vec{h}|\big)$ vernachlässigen, ist also

$$\int\limits_{\partial R_i} \vec{V}(\boldsymbol{x})\,ds = \int\limits_{\partial R} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0+\vec{x})\,ds$$
$$\approx \int\limits_{\partial R} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\,ds + \int\limits_{\partial R} S\vec{x}\,ds + \tfrac{1}{2}\int\limits_{\partial R} \operatorname{rot}\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\times\vec{x}\,ds\,, \qquad (*)$$

wobei R das um den negativ genommenen Ortsvektor von $\boldsymbol{x}_0$ verschobene Rechteck R_i sei, d.h., wenn $\boldsymbol{x}$ den Rand von R durchläuft, durchläuft $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}$ den Rand von R_i.

Das erste Integral in dieser Summe ist ein Kurvenintegral über das konstante Vektorfeld, das jedem Punkt den Vektor $\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)$ zuordnet. Dieses Vektorfeld ist offensichtlich ein Potentialfeld, denn sind V_1, V_2 und V_3 die Komponenten dieses Vektors, so ist

$$\operatorname{grad}\big(\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{x}\big) = \operatorname{grad}(V_1x+V_2y+V_3z) = \vec{V}(x_0)\,.$$

Genauso ist auch $S\vec{h}$ ein Potentialfeld, denn der Gradient der quadratischen Form

$${}^t\vec{x}S\vec{x} = S_{11}x^2+S_{22}y^2+S_{33}z^2$$
$$+(S_{12}+S_{21})xy+(S_{13}+S_{31})xz+(S_{23}+S_{32})yz$$

ist wegen $S_{k\ell}=S_{\ell k}$ gleich dem Zweifachen dieses Vektorfelds.

Damit sind also die beiden Vektorfelder $\vec{V}(x_0)$ und $S\vec{x}$ zirkulationsfrei, und die Integrale über den (als Kurve geschlossenen) Rand von R_i verschwinden.

Damit haben wir (bis auf die hier unterdrückten, für einen richtigen Beweis aber unbedingt notwendige Abschätzung der Fehlerterme) den folgenden Satz bewiesen:

Satz: Das Vektorfeld $\vec{V}\colon G\to\mathbb{R}^3$ habe eine symmetrische JACOBI-Matrix, d.h. $\operatorname{rot}\vec{V}$ sei identisch null. Dann gilt für jedes reguläre

Flächenstück $f\colon D\to G$, dessen Rand eine Kurve γ ist,

$$\int\limits_{\gamma}\vec{V}\,ds = 0\,.$$

Denn nach obiger Rechnung verschwindet bei symmetrischer JACOBI-Matrix das Kurvenintegral entlang eines jeden Rechtecks, und die Summe all dieser Kurvenintegrale konvergiert bei immer feinerer Rechteckunterteilung des Flächenstücks gegen das Kurvenintegral längs des Rands γ von $B=f(D)$.

Dies reicht schon für den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^3$: Wir wissen bereits, daß ein Vektorfeld genau dann eine Stammfunktion hat, wenn es zirkulationsfrei ist – die eine Richtung dieser Aussage haben wir gerade wieder angewandt. Außerdem wissen wir, daß für ein Vektorfeld mit Stammfunktion die Rotation verschwindet, denn für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion φ ist $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$. Für ein leicht nachprüfbares Kriterium zur Existenz einer Stammfunktion fehlt also nur noch die Aussage, daß aus dem Verschwinden der Rotation die Zirkulationsfreiheit folgt.

Diese Aussage ist aber leider falsch: Das Beispiel des Magnetfelds eines stromdurchflossenen Leiters zeigte, daß die Rotation sehr wohl identisch verschwinden kann, ohne daß das Vektorfeld zirkulationsfrei ist. Dieses Magnetfeld $\vec{V}(x,y,z)=\frac{c}{x^2+y^2}\binom{-y}{x}$ ist allerdings auf der z-Achse nicht definiert, und wir hatten im Beispiel Kreise um die z-Achse betrachtet.

Bei einem überall definiertes Vektorfeld hätten wir für einen solchen Kreis einfach die geschlossene Kreisscheibe B betrachten können, deren Rand der betrachtete Integrationsweg ist, und nach obigem Satz wäre das Integral längs des Randes verschwunden.

Das Problem bei diesem Gegenbeispiel liegt also offensichtlich darin, daß der betrachtete Integrationsweg nicht als Rand eines regulären Flächenstücks im Definitionsbereich des Vektorfelds geschrieben werden kann: Da das Vektorfeld auf der z-Achse nicht definiert ist, muß der Schnittpunkt mit der z-Achse aus der Kreisscheibe herausgenommen

werden, wir haben also nur noch einen punktierten Kreis, und dessen Rand besteht aus der Kreislinie *plus* dem herausgenommenen Punkt.

Um solche Fälle auszuschließen definieren wir:

Definition: Eine offene zusammenhängende Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *einfach zusammenhängend,* wenn jede geschlossene Kurve γ in G Rand eines regulären Flächenstücks ist. Anschaulich kann man dies auch so interpretieren, daß die Kurve innerhalb von G auf einen Punkt zusammengezogen werden kann: Man denke sich die Kurve als einen stark angespannten Gummiring; wenn man diesen auf ein Flächenstück legt, zieht er sich automatisch zusammen. Umgekehrt überstreicht der Ring beim Zusammenziehen auf einen Punkt ein Flächenstück, dessen Rand die Ausgangsposition des Gummis ist.

Mit dieser Definition gilt dann offensichtlich die folgende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf den $\mathbb{R}^3$:

Satz: Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}\colon G \to \mathbb{R}^3$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn $\operatorname{rot}\vec{V}$ dort identisch verschwindet, d.h. also, wenn die JACOBI-Matrix symmetrisch ist.

∎

Für ein ebenes Vektorfeld gilt entsprechend

Satz: Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}\colon G \to \mathbb{R}^2$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x}$$

dort identisch verschwindet, d.h. also, wenn die JACOBI-Matrix symmetrisch ist.

Beweis: Dies folgt sofort aus dem Satz von GREEN.

∎

Auf höhere Dimension soll nicht genauer eingegangen werden; nur soviel sei erwähnt: Die eindeutige Bestimmtheit des Normalenvektors

eines Flächenstücks im $\mathbb{R}^3$ hat in höheren Dimensionen keine Entsprechung mehr; dort muß man von einem Flächenstück explizit *fordern,* daß es orientierbar ist im folgenden Sinne: Man kann es durch kleine rechteckförmige Flächen überdecken und jedem dieser „Rechtecke“ einen Umlaufsinn zuordnen derart, daß die gemeinsame Kante zweier Nachbarrechtecke von diesen beiden Rechtecken entgegengesetzt orientiert wird.

Wenn man dann den einfachen Zusammenhang einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ dadurch definiert, daß jede geschlossene Kurve in G Rand eines so orientierbaren Flächenstücks sein soll, was auch wieder im wesentlichen äquivalent ist zur Zusammenziehbarkeit der Kurve, gilt auch hier der

Satz: Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}\colon G \to \mathbb{R}^n$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn die JACOBI-Matrix von $\vec{V}$ symmetrisch ist.

∎

Damit genug zum ersten der drei Hauptsätze dieses Paragraphen; wir machen weiter, wo wir vor der Spezialisierung auf symmetrische Vektorfelder aufgehört haben und folgern, daß nach $(*)$ für ein beliebiges differenzierbares Vektorfeld gilt

$$\int\limits_{\partial R_i} \vec{V}(\boldsymbol{x})\,ds \approx \tfrac{1}{2}\int\limits_{\partial R} \operatorname{rot}\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\times\vec{x}\,ds\,;$$

wir müssen uns also dieses Integral genauer ansehen. Dabei setzen wir zur Abkürzung

$$\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{V}(x_0)\,;$$

dann ist der Integrand

$$\tfrac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{x})\cdot ds\,.$$

Nach Definition eines Kurvenintegrals ist das Integral hierüber Grenzwert einer Summe von Termen der Art

$$\tfrac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{x}_j)\cdot\vec{t}_j\,,$$

wobei $\boldsymbol{x}_j$ Punkte auf der Kurve sind und t_j die Tangentenvektoren in diesen Punkten. Dieses Skalarprodukt eines Vektorprodukts mit einem

Vektor ist bekanntlich das *Spatprodukt,* und es ist gleich der Determinante mit den Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{x}_j$ und t_j. Diese Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Spalten vertauscht; tut man dies zweimal, kehrt sie wieder zu ihrem alten Wert zurück. Daher ist

$$(\vec{a} \times \vec{x}_j) \cdot \vec{t}_j = (\vec{x}_j \times \vec{t}_j) \cdot \vec{a} \,.$$

Der Vektor $\vec{x}_j \times \vec{t}_j$ steht senkrecht auf $\vec{x}_j$ und auf $\vec{t}_j$; falls wir also von einem *flachen* Rechteck ausgehen, steht er auch senkrecht auf diesem und hat somit die Richtung des Normalenvektors. Sein Betrag ist gleich der Fläche des von $\vec{x}_j$ und $\vec{t}_j$ aufgespannten Parallelogramms, die Hälfte davon also gleich der Fläche des von diesen beiden Vektoren aufgespannten Dreiecks. Die Summe aller dieser Dreiecksflächen ist im Limes gleich der Fläche des Rechtecks, über dessen Rand wir integrieren, also ist das Integral über den Rand des Rechtecks für kleine Rechtecke näherungsweise gleich einem Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{a}$, wobei $\vec{n}$ als Länge den Flächeninhalt des Rechtecks hat und als Richtung die des Normalenvektors. Als Grenzwert einer Summe solcher Skalarprodukte ist aber gerade das Integral

$$\iint\limits_f \operatorname{rot} \vec{V} \, d\vec{O}$$

erklärt; wenn wir immer feinere Rechteckunterteilungen betrachten, konvergiert die Summe der Kurvenintegrale über die Ränder dieser Rechtecke also einerseits gegen das Kurvenintegral des Vektorfelds über den Rand γ des betrachteten Flächenstücks, andererseits aber auch gegen das Integral der Rotation von $\vec{V}$ über das Flächenstück selbst. Dies ist der

Satz von Stokes: $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Weiter sei $f: D \to G$ ein reguläres Flächenstück mit einer stückweise regulären Kurve γ als Rand. Dann ist

$$\int\limits_\gamma \vec{V} \, ds = \iint\limits_f \operatorname{rot} \vec{V} \, d\vec{O} \,.$$

GEORGE GABRIEL STOKES (1819–1903) wurde in Irland geboren als jüngster von sechs Söhnen eines protestantischen Pfarrers. Nach dem Tod seines Vaters kam er im Alter von 16 Jahren an eine Schule nach Bristol in England und begann zwei Jahre später sein Studium an der Universität Cambridge. Er wurde vor allem bekannt durch seine Arbeiten zur mathematischen Physik, für die er viele mathematische Techniken entwickelte. Er gilt als der Begründer sowohl der Strömungslehre als auch der Geodäsie und hatte unter anderem großen Einfluß auf die Entwicklung von MAXWELL. Ab 1849 lehrte er als Professor an der Universität Cambridge.

Aus dem Satz von STOKES können wir eine neue Charakterisierung der Rotation herleiten:

Satz: $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld, $\vec{e}$ ein Einheitsvektor, und $\gamma_{\vec{e},r}$ ein Kreis mit Radius r um $\boldsymbol{x}_0$ ist, der in einer Ebenen senkrecht zu $\vec{e}$ liege und von $\vec{e}$ aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werde; die gesamte von $\gamma_{\vec{e},r}$ berandete Kreisscheibe liege in G. Dann ist

$$\operatorname{rot} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\gamma_{\vec{e},r}} \vec{V} \, ds \,.$$

Beweis: $\gamma_{\vec{e},r}$ ist Rand einer Kreisscheibe D vom Radius r mit Flächeninhalt πr^2; nach dem Satz von STOKES ist

$$\int\limits_{\gamma_{\vec{e},r}} \vec{V} \, ds = \iint\limits_D \operatorname{rot} \vec{V} \, d\vec{O} = \iint\limits_D (\operatorname{rot} \vec{V}) \cdot \vec{e} \, dO \,,$$

und für immer kleiner werdende Werte von r stimmt dies immer besser überein mit $\operatorname{rot} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \vec{e}$ mal dem Flächeninhalt der Kreisscheibe. ∎

Falls die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind, falls also insbesondere die Kreislinie Rand einer im Definitionsbereich von $\vec{V}$ enthaltenen Fläche ist, läßt sich die Rotation somit als Limes einer Art „normierter" Zirkulation auffassen, d.h. als Integral längs einer geschlossenen Kurve dividiert durch die Länge dieser Kurve. Die Rotation gibt also auch ein Maß für die Abweichung eines Vektorfelds von der Zirkulationsfreiheit.

Damit wäre auch der zweite Hauptsatz dieses Abschnitts bewiesen; bleibt noch der

Satz von Gauß: $\vec{W}\colon G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld und $f\colon D \to G$ sei ein reguläres Flächenstück derart, daß $B = f(D)$ Rand eines beschränkten dreidimensionalen Bereichs V sei. Dann ist

$$\iint\limits_f \vec{W}\, d\vec{O} = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{W}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Bemerkung: Der Satz gilt auch, mit den offensichtlichen Definitionen, falls der Rand von V kein Flächen*stück* ist, sondern eine Fläche, die aus endlich vielen regulären Stücken zusammengesetzt ist. Am Beweis ändert sich dabei abgesehen vom größeren Schreibaufwand praktisch nichts.

Der *Beweis* des Satzes von GAUSS beruht auf derselben Idee wie der des Satzes von STOKES: Dort hatten wir ein Flächenstück durch Rechtecke angenähert, um das Kurvenintegral längs seines Randes zu einem Integral über das Flächenstück in Beziehung zu setzen; hier unterteilen wir entsprechend das Volumen V in kleine, der Einfachheit halber als achsenparallel vorausgesetzte Quader, um das Oberflächenintegral über den Rand von V mit einem Integral über V in Beziehung zu setzen.

Ein solcher Quader sei Q_i, und $\vec{h}, \vec{k}, \vec{\ell}$ seien die drei Kantenvektoren von Q_i in Richtung der x-, y- und z-Achse. Dann ist das Integral von $\vec{W}$ über die Oberfläche von Q_i gleich

$$\iint\limits_{\partial Q_i} \vec{W}\, d\vec{O} = \underbrace{\iint \vec{W}\, d\vec{O}}_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} + \underbrace{\iint \vec{W}\, d\vec{O}}_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} + \underbrace{\iint \vec{W}\, d\vec{O}}_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}}\,,$$

und weiter ist beispielsweise

$$\begin{aligned}\underbrace{\iint \vec{W}\, d\vec{O}}_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} &= \underbrace{\iint \vec{W}\, d\vec{O}}_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} + \underbrace{\iint \vec{W}\, d\vec{O}}_{\substack{\text{rechte}\\ \text{Seitenfläche}}}\\ &= \underbrace{\iint \vec{W}(\boldsymbol{x})\, d\vec{O}}_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} - \underbrace{\iint \vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h})\, d\vec{O}}_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}}\\ &= -\underbrace{\iint \bigl(\vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h}) - \vec{W}(\boldsymbol{x})\bigr)\, d\vec{O}}_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}}\,,\end{aligned}$$

denn da alle Normalenvektoren nach außen zeigen, sind die linke und die rechte Seite des Quaders verschieden orientiert.

Nun kommt die Differenzierbarkeit von $\vec{W}$ ins Spiel und sagt uns, daß

$$\vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h}) = \vec{W}(\boldsymbol{x}) + J_{\vec{W}}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} + o\bigl(\bigl|\vec{h}\bigr|\bigr)$$

ist. Da der Vektor $\vec{h}$ in Richtung der x-Achse zeigt, können wir das (mit $h = \bigl|\vec{h}\bigr|$) auch einfacher schreiben als

$$\vec{W}(x+h, y, z) = \vec{W}(x, y, z) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{W}\right) \cdot h + o(h)\,,$$

wobei die partielle Ableitung von $\vec{W}$ nach x für jenes Vektorfeld stehen soll, dessen Komponenten die partiellen Ableitungen der entsprechenden Komponenten von $\vec{W}$ sind. Da wir in diesem Semester noch viel zu tun haben, vernachlässigen wir den Term $o(h)$ in der Hoffnung, daß er für immer feiner werdende Unterteilungen trotz der dann ansteigenden *Anzahl* dieser Terme keine Rolle mehr spielen wird.

In der Tat sollte ein mit den Abschätzungstechniken aus der Analysis I vertrauter Leser keine Schwierigkeiten haben, dies mathematisch streng zu zeigen. Die Heuristik, nach der man dabei vorgeht, ist (hoffentlich) klar: Die Anzahl aufeinanderliegender Quader in Richtung der x-Achse ist proportional zu $1/\,|\vec{h}|$, und $1/\,|\vec{h}|$ Terme der Größenordnung $o(|\vec{h}|$ addieren sich zu einem Term der Größenordnung $o(1)$, d.h. zu einer Funktion, die gegen Null geht. (Die Aussage „geht schneller als 1 gegen Null“ ist natürlich gleichbedeutend damit, daß die Funktion überhaupt gegen Null geht.)

Der Einheitsnormalenvektor der linken Seite des Quaders zeigt in Richtung der negativen x-Achse, denn die linke Seite ist parallel zur (y,z)-Ebene und zeigt nach außen. Wenn wir den Einheitsvektor der x-Achse mit $\vec{e}_x$ bezeichnen, ist daher

$$d\vec{O} = -\vec{e}_x \, dy \, dz$$

und damit

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W} \, d\vec{O} \approx -\iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \left(\vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h}) - \vec{W}(\boldsymbol{x})\right) d\vec{O} \,,$$

$$= \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} h \cdot \frac{\partial}{\partial x}\vec{W} \cdot \vec{e}_x = h \cdot \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} \\ \frac{\partial V_1}{\partial y} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx \, dy$$

$$= h \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_1}{\partial x} \, dy \, dz \,.$$

Ganz entsprechend ist

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{W} \, d\vec{O} \approx k \iint\limits_{\substack{\text{vordere}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_2}{\partial y} \, dx \, dz$$

und

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{W} \, d\vec{O} \approx \ell \iint\limits_{\substack{\text{obere}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_3}{\partial z} \, dx \, dy \,.$$

Nach dem Mittelwertsatz für Flächenintegrale können wir diese Integrale weiter abschätzen: Es gibt Punkte ξ auf der linken, η auf der vorderen und ζ auf der unteren Seitenfläche, so daß

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W} \, d\vec{O} \approx h \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_1}{\partial x} \, dy \, dz$$

$$= h \frac{\partial V_1}{\partial x}(\xi) \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} dy \, dy = hkl \frac{\partial V_1}{\partial x}(\xi) \,.$$

Genauso ist

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{W} \, d\vec{O} \approx hkl \frac{\partial V_2}{\partial y}(\eta)$$

und

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{W} \, d\vec{O} \approx hkl \frac{\partial V_3}{\partial z}(\zeta) \,.$$

Nun ist es wieder an der Zeit, eine etwas komplexere Abschätzung unter den Tisch fallen zu lassen: Die Punkte ξ, η und ζ liegen auf den Seitenflächen eines Quaders, der immer kleiner werden soll. Damit rücken auch diese Punkte immer weiter zusammen und wir sollten wohl keinen allzu großen Fehler machen, wenn wir einfach *irgendeinen* Punkt $\boldsymbol{x}_i$ im Quader Q_i auswählen und sowohl ξ, η als auch ζ durch diesen Punkt ersetzen; die formale Rechtfertigung hierfür geht wieder aus von der Differenzierbarkeit des Vektorfelds V und beruht im übrigen auf Abschätzungen.

Wenn wir das alles glauben, ist also

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W} \, d\vec{O} \approx hkl \frac{\partial V_1}{\partial x}(\boldsymbol{x}_i) \,,$$

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{W} \, d\vec{O} \approx hkl \frac{\partial V_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}_i) \quad \text{und}$$

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{W} \, d\vec{O} \approx hkl \frac{\partial V_3}{\partial z}(\boldsymbol{x}_i) \,.$$

Das Oberflächenintegral über die gesamte Quaderoberfläche ist die Summe dieser drei Teilintegrale, und da bekanntlich

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(\boldsymbol{x}_i) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}_i) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(\boldsymbol{x}_i) = \operatorname{div} \vec{W}(\boldsymbol{x}_i)$$

ist, haben wir somit gezeigt, daß

$$\iint\limits_{\partial Q_i} \vec{W} \, d\vec{O} \approx hkl \, \operatorname{div} \vec{W}(\boldsymbol{x}_i) = \operatorname{div} \vec{W}(\boldsymbol{x}_i) \cdot \operatorname{Vol}(Q_i) \qquad (*)$$

ist.

Damit haben wir eine lokale Version des Satzes von GAUSS gezeigt; zum Beweis des Satzes selbst nähern wir das Volumen V an durch die Quader Q_i. Dann ist

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{W}\, dx\, dy\, dz \approx \sum_i \operatorname{div} \vec{W}(\boldsymbol{x}_i) \cdot \operatorname{Vol}(Q_i)\,,$$

und wenn wir die Quader immer weiter verkleinern, wird im Limes aus dem Ungefährzeichen ein Gleichheitszeichen – genau so hatten wir schließlich Volumenintegrale definiert.

Im Falle des Integrals über die Randfläche $B = f(D)$ von V ist die Situation etwas komplizierter: Wie beim Beweis des Satzes von STOKES überlegt man sich zunächst leicht, daß eine gemeinsame Seitenfläche zweier benachbarter Quader von den beiden Quadern verschieden orientiert wird, so daß sich die beiden Integrale über diese Fläche gegenseitig aufheben; die Summe über alle Oberflächenintegrale über die Q_i ist also gleich der Summe über alle Oberflächenintegrale über jene Seitenflächen von Quadern Q_i, die nur Seitenfläche eines einzigen Quaders sind, d.h. also über die Randfläche der Vereinigung aller Quader Q_i.

Die Quaderflächen, die diesen Rand ausmachen, sind allesamt parallel zu Koordinatenebenen; ihre Normalenvektoren sind also parallel zu Koordinaten*achsen,* wohingegen die Normalenvektoren von B natürlich beliebige Richtungen haben können. Wir müssen uns überlegen, warum die Integrale im Limes trotzdem gleich sein können.

Der Integrand bei einem Oberflächenintegral über ein Vektorfeld ist das Skalarprodukt aus dem Normalenvektor von B im jeweils betrachteten Punkt und dem Wert $\vec{W}(\boldsymbol{x})$ des Vektorfelds in diesem Punkt. Konkret sei etwa $\vec{n}$ der Normalenvektor im Punkt $\boldsymbol{x} \in B$, und in Koordinaten sei

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{W}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{W}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{n} &= v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 \\ &= \vec{W}(\boldsymbol{x}) \cdot (n_1 \vec{e}_1) + \vec{W}(\boldsymbol{x}) \cdot (n_2 \vec{e}_2) + \vec{W}(\boldsymbol{x}) \cdot (n_3 \vec{e}_3)\,; \end{aligned}$$

wir erhalten also dasselbe Skalarprodukt auch, indem wir $\vec{W}(\boldsymbol{x})$ nacheinander mit geeigneten Normalenvektoren von Quaderflächen parallel zu den Koordinatenebenen multiplizieren und die Ergebnisse aufaddieren.

Falls $\vec{n}$ drei nichtverschwindende Komponenten hat, ist klar, daß die Fläche B in der Nähe von $\boldsymbol{x}$ nur so durch Quader angenähert werden kann, daß es dort freie Randflächen parallel zu allen drei Koordinatenebenen gibt; ein nicht allzu schwieriges Argument über den Satz von PYTHAGORAS zusammen mit Limesbetrachtungen zeigt, daß auch mit den Längen alles gut geht, so daß auch das Oberflächenintegral über B gleich der Summe der Integrale über die Quaderoberflächen ist.

Wie wir oben gesehen haben, ist der Satz für einen einzelnen Quader richtig; da auf beiden Seiten das Integral durch Summen entsprechender Integrale für Quader angehähert werden kann, ist also der Satz von GAUSS (modulo zahlreicher Auslassungen) bewiesen. ∎

Genau wie der Satz von STOKES zu einer alternativen Definition der Rotation führte, kann mit dem Satz von GAUSS die *Divergenz* auf andere Weise ausgedrückt werden; zumindest für Quader haben wir die entsprechende Formel im gerade beendeten Beweis als Formel $(*)$ bereits hergeleitet:

Satz: Für ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{W}\colon G \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\operatorname{div} \vec{W}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{r \to 0} \frac{3}{4\pi r^3} \iint_{\partial B_r} \vec{W}\, d\vec{O}\,,$$

wobei B_r eine Kugel mit Radius r um $\boldsymbol{x}_0$ ist, deren Normalenvektoren nach außen zeigen.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz ist das Volumenintegral über B_r gleich dem Produkt des Volumens $\frac{4}{3}\pi r^3$ von B_r mit dem Wert des Integranden $\operatorname{div} \vec{W}$ an einem geeigneten Punkt der Kugel. Falls r gegen Null geht, muß dieser Punkt immer näher an den Mittelpunkt der Kugel rücken, bis er im Limes mit diesem zusammenfällt. ∎

Auch der Satz von GAUSS läßt sich wieder anschaulich interpretieren: Bei der Definition der Divergenz haben wir uns bereits überlegt, daß diese mißt, inwieweit ein Punkt eher eine Quelle oder eine Senke für ein Vektorfeld ist. Da das Oberflächenintegral gerade gleich dem Fluß des Vektorfelds durch die betrachtete Oberfläche ist und wir die Oberfläche so orientiert haben, daß der Normalenvektor nach außen zeigt, sagt der Satz von GAUSS also einfach, daß der gesamte Fluß einer Vektorfelds durch die Oberfläche eines Volumens V genau das ist, was im Innern von V erzeugt oder (bei negativen Vorzeichen auf beiden Seiten) vernichtet wird.

Der obige Satz zur Charakterisierung der Divergenz zeigt dementsprechend noch einmal, warum die Divergenz auch als *Quellendichte* bezeichnet wird: Nach dem Satz von GAUSS ist der Fluß durch die Oberfläche einer Kugel gleich der Summe des im Innern erzeugten oder vernichteten; dividiert man dies durch das Volumen der Kugel, entsteht die Quellen*dichte,* deren Grenzwert für immer kleiner werdende Kugeln gleich der Divergenz ist.

$\mathcal{E}\ \mathcal{N}\ \mathcal{D}\ \mathcal{E}$

$\mathcal{S}\ \mathcal{C}\ \mathcal{H}\ \ddot{\mathcal{O}}\ \mathcal{N}\ \mathcal{E}\quad \mathcal{F}\ \mathcal{E}\ \mathcal{R}\ \mathcal{I}\ \mathcal{E}\ \mathcal{N}\ !$