Dies wird auf einer CD zum einen dadurch berücksichtigt, daß man die Information nicht linear anordnet (die geraden Bytes werden gegenüber den ungeraden verzögert), zum anderen dadurch, daß man anstelle des Bits das Byte als grundlegende Einheit betrachtet, d.h. man arbeitet mit dem Körper $\mathbb{F}_{256}$.

Die Fehlerkorrektur arbeitet mit Prüfbytes, die (wie Paritätsbits) durch lineare Abbildungen definiert sind. Zu einem Vektor aus 24 Bytes werden in zwei Stufen insgesamt acht Prüfbytes berechnet, und zwar werden zunächst vier Prüfbytes angehängt derart, daß der entstehende Vektor aus $\mathbb{F}_{256}^{28}$ im Kern der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{F}_{256}^{28} \to \mathbb{F}_{256}^{4};\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{27} \\ x_{28} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{28} x_i \\ \sum_{i=1}^{28} \alpha^{28-i} x_i \\ \sum_{i=1}^{28} \alpha^{2(28-i)} x_i \\ \sum_{i=1}^{28} \alpha^{3(28-i)} x_i \end{pmatrix}$$

liegt, danach werden vier weitere Bytes angehängt derart, daß der entstehende Vektor aus $\mathbb{F}_{256}^{32}$ im Kern der linearen Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{F}_{256}^{32} \to \mathbb{F}_{256}^{4};\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{32} x_i \\ \sum_{i=1}^{32} \alpha^{32-i} x_i \\ \sum_{i=1}^{32} \alpha^{2(32-i)} x_i \\ \sum_{i=1}^{32} \alpha^{3(32-i)} x_i \end{pmatrix}$$

liegt. $\alpha \in \mathbb{F}_{256}$ bezeichnet dabei wie üblich jenes Element, für das die Eins zusammen mit α bis α^7 eine $\mathbb{F}_2$-Basis von $\mathbb{F}_{256}$ ist, und das Nullstelle des definierenden Polynoms ist.

Durch Kombination dieser Prüfbytes mit einer geschickten (nichtlinearen) Anordnung der Bytes auf der Spirale lassen sich selbst Fehler einer Länge von etwa 4 000 Bit beheben – teils durch echte Korrektur, teils durch bloße Fehlererkennung und Interpolation aus unverfälschten Daten. Versuche von Physikern der University of Maryland haben ergeben, daß eine CD eingebohrte Löcher mit einem Durchmesser von 0,8 mm problemlos verkraftet, und selbst ein Lochdurchmesser von 1,5 mm führt kaum zu Knackgeräuschen. Einzelheiten findet man unter `www.physics.umd.edu/deptinfo/facilities/lecdem/h4-67.htm` .

i) Der Körper mit 256 Elementen in der Kryptographie

Zwar lehnt es die Internationale Standardisierungsorganisation ISO ab, ein Kryptoverfahren zu standardisieren (Ein Grund dafür ist die dann befürchtete Bündelung krimineller Energie auf dieses Verfahren), aber das amerikanische Handelsministerium hat am 2. Januar 1997 die Suche nach einem Nachfolgealgorithmus für den nach heutigen Standards nicht mehr sicheren DES *(Data Encryption Standard)* international ausgeschrieben. Federführend für die Auswahl war das *National Institute of Standards and Technology* (NIST) in Gaithersburg, Maryland, das am 2. Oktober 2000 den Algorithmus Rijndael der beiden flämischen Kryptologen JOAN DAEMEN und VINCENT RIJMEN auswählte. (Als Aussprachehilfe für Personen, die kein Niederländisch, Flämisch, Surinamer oder Afrikaans sprechen, geben diese folgende englische Approximationen des Wortes „Rijndael“: „Reign Dahl“, „Rain Doll“ und „Rhine Dahl“.) Es steht zu erwarten, daß Rijndael bald auch außerhalb der USA zu *dem* künftigen Standardverfahren in der Kryptographie wird.

Grundidee sind, wie bei allen Kryptoverfahren, die beiden SHANNONschen Forderungen der *Diffusion* und *Konfusion:* Ersteres bedeutet, daß sich schon die Änderung eines einzigen Klartextbits an vielen, möglichst weit entfernten Stellen bemerkbar machen muß, das zweite bedeutet in erster Linie eine hohe Nichtlinearität der Verschlüsselungsabbildung, so daß diese ohne Kenntnis des Schlüssels nicht invertiert werden kann.

Nichtlinearität erreicht Rijndael durch die Abbildung $\mathbb{F}_{256} \to \mathbb{F}_{256}$, die die Null auf sich selbst abbildet und jedes andere Element auf sein multiplikatives Inverses. Über mehrere Runden hinweg wird diese Abbildung auf Byte-Ebene immer wieder mit linearen Abbildungen und Vektoradditionen auf $\mathbb{F}_{256}^4$ und Shift-Operationen auf $\mathbb{F}_{256}^{16}$ oder noch größeren Vektorräumen kombiniert, wobei zu diesem Zweck etwa die Elemente von $\mathbb{F}_{256}^4$ mit Polynomen vom Grad höchstens drei über $\mathbb{F}_{256}$ identifiziert werden, die modulo einem festen (reduziblen) Polynom vom Grad vier miteinander multipliziert werden. Alle linearen Abbildungen sind $\mathbb{F}_{256}$-linear, was auf Bitebene noch einmal einen Konfusionseffekt hat. Die einzelnen Operationen hängen ab von einem Schlüsselvektor, der

Element von $\mathbb{F}_{256}^{16}$, $\mathbb{F}_{256}^{24}$ oder $\mathbb{F}_{256}^{32}$ sein kann und somit 128, 192 oder 256 Bit lang ist – nach heutigem Stand zu lange, als daß man alle Schlüssel durchprobieren könnte wie etwa bei DES mit seiner Schlüssellänge von nur 56. Einzelheiten sind via `www.rijndael.com` zu finden.

j) Der diskrete Logarithmus

Ein Verfahren wie AES kann nur dann sicher angewendet werden, wenn Sender und Empfänger sich auf einen Schlüssel geeinigt haben; dessen Austausch durch sicheren Boten ist beispielsweise für Anwendungen der Kryptographie im Internet zu aufwendig um praktikabel zu sein.

Zum Glück gibt es seit etwa 25 Jahren auch Verfahren, mit denen ein solcher Schlüssel über eine unsichere Leitung sicher vereinbart werden kann; Internetbrowser tun dies beispielsweise bei der sicheren Datenübertragung automatisch, ohne daß der Benutzer etwas merkt.

Das mathematische Verfahren, das meist dahinter steckt, hat zwar nichts mit Vektorräumen zu tun, dafür aber immerhin mit endlichen Körpern; es sei daher zum Abschluß dieses Paragraphen kurz erwähnt. Es beruht auf den sogenannten *diskreten Logarithmen.*

In $\mathbb{R}$ ist der Logarithmus zur Basis a die Umkehrfunktion der Funktion $x \mapsto a^x$; genauso definieren wir ihn auch für endliche Körper:

$$y = a^x \Longrightarrow x = \log_a y\,.$$

Trotz dieser formalen Übereinstimmung gibt es es allerdings große Unterschiede zwischen reellen Logarithmen und ihren Analoga in endlichen Körpern: Während reelle Logarithmen sanft ansteigende stetige Funktionen sind, die man leicht mit beliebig guter Genauigkeit annähern kann, sieht der diskrete Logarithmus typischerweise so aus, wie es in der Abbildung zu sehen ist. Auch ist im Reellen der Logarithmus zur Basis $a > 1$ für jede positve Zahl definiert; in endlichen Körpern ist es viel schwerer zu entscheiden, ob ein bestimmter Logarithmus existiert: Modulo sieben etwa sind 2, 4 und 1 die einzigen Zweierpotenzen, so daß 3, 5 und 6 keine Zweierlogarithmen haben. Ein Satz aus der Algebra besagt allerdings, daß es stets Elemente a gibt, für die a^x jeden Wert außer

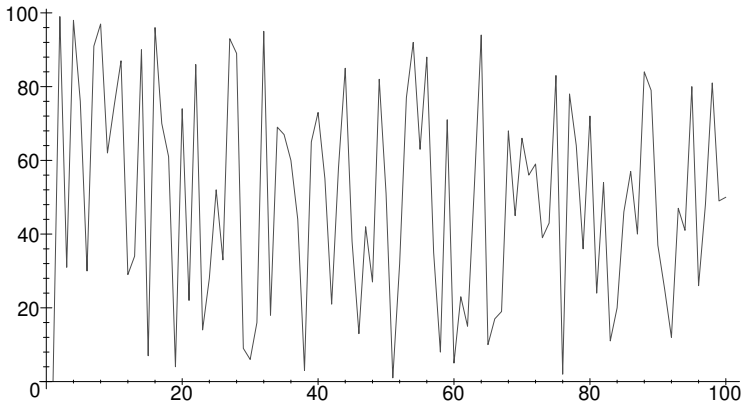


Abb. 11: Die Funktion $\log_{51} x$ in $\mathbb{F}_{101}$

der Null annimmt, die sogenannten primitiven Wurzeln. In $\mathbb{F}_7$ wären dies etwa drei und fünf.

Die Berechnung der Potenzfunktion durch sukzessives Quadrieren und Multiplizieren ist auch in endlichen Körpern einfach, für ihre Umkehrfunktion, den diskreten Logarithmus gibt es aber derzeit nur deutlich schlechtere Verfahren. Die derzeit besten Verfahren zur Berechnung von diskreten Logarithmen in Körpern mit N Elementen erfordern etwa denselben Aufwand wie die Faktorisierung eines RSA-Moduls der Größenordnung N; diese Diskrepanz zwischen Potenfunktion und Logarithmen kann kryptologisch ausgenutzt werden.

Als Körper verwendet man entweder Körper von Zweipotenzordnung, da man in diesen gut rechnen kann, oder Körper von Primzahlordnung. Da es für viele interessante Körper von Zweipotenzordnung bereits Chips gibt, die dort diskrete Logarithmen berechnen, dürften Körper von Primzahlordnung bei ungefähr gleicher Elementanzahl wohl etwas sicherer sein: Es gibt einfach viel mehr Primzahlen als Zweierpotenzen, und jeder Fall erfordert einen neue Hardwareentwurf. Falls man die Primzahlen hinreichend häufig wechselt, dürfte sich dieser Aufwand für kaum einen Gegner lohnen.

Da Körper von Primzahlordnung auch einfacher sind als solche von Primzahlpotenzordnung, wollen wir uns hier auf die ersteren beschränken; die Übertragung des Algorithmus auf Körper von Zweipotenzordnung sollte dem Leser keine Schwierigkeiten machen.

Beim DIFFIE-HELLMANN-Verfahren, dem ältesten auf der Grundlage diskreter Logarithmen, geht es darum, wie zwei Teilnehmer, die weder über gemeinsame Schlüsselinformation noch über eine sichere Leitung verfügen, einen Schlüssel vereinbaren können.

Nach DIFFIE-HELLMANN einigen sie sich zunächst (über die unsichere Leitung) auf eine Primzahl p und eine natürliche Zahl a derart, daß die Potenzfunktion $x \mapsto a^x$ möglichst viele Werte annimmt.

Als nächstes wählt Teilnehmer A eine Zufallszahl $x < p$ und B entsprechend $y < p$; A schickt $u = a^x \bmod p$ an B und erhält dafür $v = a^y \bmod p$.

Sodann berechnet A die Zahl

$$v^x \bmod p = \left(a^y\right)^x \bmod p = a^{xy} \bmod p$$

und B entsprechend

$$u^y \bmod p = \left(a^x\right)^y \bmod p = a^{xy} \bmod p\,;$$

beide haben also auf verschiedene Weise dieselbe Zahl berechnet, die sie nun als Schlüssel in einem klassischen Kryptosystem verwenden können: Beispielsweise könnten die letzten 128, 196 oder 256 Bit der Zahl als AES-Schlüssel dienen.

Ein Gegner, der den Datenaustausch abgehört hat, kennt die Zahlen p, a, u und v; um $a^{xy} \bmod p$ zu finden, muß er den diskreten Logarithmus von u oder v berechnen.

Mit den besten heute bekannten Algorithmen ist dies möglich, wenn p eine Primzahl von bis zu etwa 512 Bit ist, also ungefähr 155 Dezimalstellen hat; auch in diesem Fall dauert die Berechnung allerdings selbst bei massiver Parallelisierung über das Internet mehrere Monate, gefolgt von einer Schlußrechnung auf einem Supercomputer.

Da diskrete Logarithmen auch für die in Deutschland rechtlich bindenden digitalen Unterschriften verwendet wird, veröffentlicht die Regulierungsbehörde für Telekommunikation und Post jedes Jahr einen Bericht über sichere Kryptoverfahren. Nach ihrem neuesten Bericht (veröffentlicht im Bundesanzeiger Nr. 48 vom 11. März 2003, S. 4202–4203, gelten Verfahren mit diskreten Logarithmen, egal ob in Körpern $\mathbb{F}_p$ von Primzahlordnung oder Körpern $\mathbb{F}_{2^n}$ von Zweierpotenzordnung bis Ende 2007 als sicher, wenn die Elementanzahl des Körpers mindestens 1024 Bit hat; für die Zeit bis Ende 2008 werden 1280 Bit gefordert. Für die Gewährleistung einer langfristigen Sicherheit wird die Erhöhung auf 2048 Bit ab 2007 empfohlen. Der Bericht ist zu finden unter
`www.regtp.de/imperia/md/content/tech_reg_t/digisign/143.pdf`;
für ältere und künftig auch neuere Versionen muß man sich von `www.regtp.de` aus Durchklicken via *Elektronische Signatur* und *Veröffentlichungen* zu *Geeignete Algorithmen.*

Natürlich gibt es keine Garantie, daß kein Gegner mit einem besseren als den bislang bekannten Verfahren diskrete Logarithmen auch in weitaus größeren Körpern berechnen kann. Dazu bräuchte er allerdings einen Durchbruch entweder auf der mathematischen oder auf der technischen Seite, für den weit und breit keine Grundlage zu sehen ist und der sich wohl auch nur schwer geheimhalten ließe – auch wenn inzwischen viele amerikanische Zahlentheoretiker Beraterverträge mit NSA haben.

Falls sich allerdings die sogenannten *Quantencomputer* realisieren lassen, werden alle heute bekannten Verfahren der Kryptographie mit öffentlichen Schlüsseln, egal ob mit diskreten Logarithmen, RSA oder elliptischen Kurven, unsicher sein. Bislang können Quantencomputer kaum mit drei Bit rechnen, und nicht alle Experten sind davon überzeugt, daß es je welche geben wird, die mit mehreren Tausend Bit rechnen können.

§3: Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Die abstrakte Art und Weise, wie wir Vektoren und lineare Abbildungen bisher betrachtet haben, hat zwar den Vorteil, daß wir damit viele

Probleme behandeln können, die nichts mit den gewohnten anschaulichen Vektoren zu tun haben; sie hat aber auch den Nachteil, daß wir bislang noch sehr wenige nichttriviale Beispiele konkret durchrechnen können. Dieser Paragraph soll die wichtigsten Hilfsmittel zum Rechnen in endlichdimensionalen Vektorräumen bereitstellen.

a) Abbildungsmatrizen

Basen sind nicht nur nützlich, um Vektoren darzustellen, sie können auch den Umgang mit linearen Abbildungen vereinfachen. Der Grund liegt im folgenden Lemma:

Lemma: V und W seien k-Vektorräume, und $\mathcal{B}$ sei eine Basis von V. Dann ist jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ eindeutig bestimmt durch die Bilder $\varphi(\vec{b})$ der Basisvektoren $\vec{b} \in \mathcal{B}$. Umgekehrt läßt sich jede Abbildung $\varphi\colon \mathcal{B} \to W$ eindeutig fortsetzen zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$

Beweis: Jeder Vektor $\vec{v} \in V$ läßt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n \quad \text{mit} \quad \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \in \mathcal{B}$$

darstellen, und für eine lineare Abbildung φ muß dann

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda_1 \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(\vec{b}_n)$$

sein. ∎

Besonders nützlich ist dies im Fall endlichdimensionaler Vektorräume.

Sei etwa V ein m-dimensionaler k-Vektorraum und W ein n-dimensionaler;

$$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\} \subset V \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\} \subset W$$

seien Basen.

Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist, wie wir gerade gesehen haben, eindeutig bestimmt durch die Bilder der Basisvektoren $\vec{b}_j$; diese wiederum lassen sich als Linearkombinationen der Basisvektoren $\vec{c}_i$ schreiben:

$$\varphi(\vec{b}_j) = a_{1j}\vec{c}_1 + a_{2j}\vec{c}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{c}_n \quad \text{mit} \quad a_{ij} \in k\,.$$

Wenn wir die Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ als *geordnete* Mengen auffassen, ist φ somit eindeutig bestimmt durch die $n \cdot m$ Skalare a_{ij}; wir fassen diese zusammen zu einer *Matrix:*

Definition: *a)* Eine $n \times m$-Matrix A über dem Körper k ist eine zweidimensionale Anordnung von Körperelementen $a_{ij} \in k$ in n Zeilen und m Spalten, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

b) Die Menge aller $n \times m$-Matrizen A über k bezeichnen wir mit $k^{n\times m}$.

Die Matrix A zur linearen Abbildung φ bezeichen wir als *Abbildungsmatrix* von φ bezüglich der (geordneten) Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$; wenn $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ vorgegeben sind, gibt es offensichtlich für jede Matrix $A \in k^{n\times m}$ eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ mit A als Abbildungsmatrix, nämlich diejenige lineare Abbildung, für die

$$\varphi(\vec{b}_j) = a_{1j}\vec{c}_1 + a_{2j}\vec{c}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{c}_n$$

ist. Bei gegebenen (geordneten) Basen entsprechen sich lineare Abbildungen und Matrizen also eineindeutig (d.h. umkehrbar eindeutig: Zu jeder linearen Abbildung gibt es *genau* eine Matrix und zu jeder Matrix *genau* eine lineare Abbildung).

Ein wesentlicher Punkt ist hier, daß es sich bei einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ im allgemeinen um eine Abbildung zwischen *unendlichen* Mengen handelt und solche Abbildungen nur selten mit endlichem Aufwand beschrieben werden können. (Wie sieht etwa eine „allgemeine" Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus?) Lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen (mit vorgegebenen geordneten Basen) sind, wie wir gerade gesehen haben, durch die endlich vielen Einträge der Abbildungsmatrix eindeutig bestimmt und damit einer algorithmischen Behandlung zugänglich.

Matrizen als zweidimensionale Zahlenschemata sind natürlich erheblich älter als Vektorräume und lineare Abbildungen; erste Spuren aus dem zweiten vorchristlichen Jahr-

hundert finden sich bereits in den *Neun Büchern der Rechenkunst* 九章算術 aus der chinesischen Han-Dynastie. Rechenregeln für den Umgang mit Matrizen tauchen ab dem 16. Jahrhundert bei den verschiedensten Autoren auf.

Als Beispiel betrachten wir den Vektorraum V aller reeller Polynome vom Grad höchstens vier und den Vektorraum W aller reeller Polynome vom Grad höchstens drei zusammen mit der linearen Abbildung

$$\varphi: V \to W; \quad f \mapsto f' .$$

Bevor wir eine Abbildungsmatrix berechnen können, brauchen wir zunächst Basen der beiden Vektorräume; am einfachsten nehmen wir dazu (mit der angegebenen Ordnung)

$$\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\} \subset V \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \{1, X, X^2, X^3\} \subset W .$$

Dann ist

$$\begin{array}{lll} \varphi(1) &= 0 & = 0\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3 \\ \varphi(X) &= 1 & = 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3 \\ \varphi(X^2) &= 2X & = 0\cdot 1 + 2\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3 \\ \varphi(X^3) &= 3X^2 & = 0\cdot 1 + 0\cdot X + 3\cdot X^2 + 0\cdot X^3 \\ \varphi(X^4) &= 4X^3 & = 0\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 4\cdot X^3 , \end{array} \quad \text{und}$$

die Abbildungsmatrix ist also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} .$$

Hier wie auch im allgemeinen Fall stehen in den *Spalten* der Abbildungsmatrix die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren von V, ausgedrückt bezüglich der Basis von W.

b) Rechenregeln für Matrizen

Wir haben Matrizen eingeführt, um mit linearen Abbildungen konkret rechnen zu können; als erstes sollten wir uns dazu überlegen, wie man mit *Matrizen* rechnen kann.

Zu zwei $n \times m$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

können wir deren Summe

$$A + B \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

definieren, und für einen Skalar $\lambda \in k$ auch das Produkt

$$\lambda A \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix} .$$

Das legt die Vermutung nahe, daß $k^{n\times m}$ mit diesen beiden Verknüpfungen ein Vektorraum sein könnte, und in der Tat gilt:

Lemma: $k^{n\times m}$ ist ein k-Vektorraum der Dimension nm.

Beweis: Beide Rechenoperationen sind so definiert, daß, wenn wir den ij-Eintrag für sich alleine betrachten, dort die entsprechende Rechenoperation im Grundkörper k ausgeführt wird. Da für die Rechenoperationen im Grundkörper alle bei der Definition eines Vektorraums geforderten Rechenregeln gelten, gelten sie auch in $k^{n\times m}$.

Beispielsweise ist also

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \dots & b_{1m}+a_{1m} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \dots & b_{2m}+a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}+a_{n1} & b_{n2}+a_{n2} & \dots & b_{nm}+a_{nm} \end{pmatrix} = B + A \end{aligned}$$

und

$$\lambda(\mu A) = \lambda \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \dots & \mu a_{1m} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \dots & \mu a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu a_{n1} & \mu a_{n2} & \dots & \mu a_{nm} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda(\mu a_{11}) & \lambda(\mu a_{12}) & \dots & \lambda(\mu a_{1m}) \\ \lambda(\mu a_{21}) & \lambda(\mu a_{22}) & \dots & \lambda(\mu a_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(\mu a_{n1}) & \lambda(\mu a_{n2}) & \dots & \lambda(\mu a_{nm}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (\lambda\mu) a_{11} & (\lambda\mu) a_{12} & \dots & (\lambda\mu) a_{1m} \\ (\lambda\mu) a_{21} & (\lambda\mu) a_{22} & \dots & (\lambda\mu) a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda\mu) a_{n1} & (\lambda\mu) a_{n2} & \dots & (\lambda\mu) a_{nm} \end{pmatrix} = (\lambda\mu) A \,.$$

Nullelement der Addition ist natürlich die Nullmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

deren sämtliche Einträge null sind, und

$$-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1m} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Schließlich müssen wir uns noch überlegen, daß $k^{n\times m}$ die Dimension nm hat; wir wir am Ende von §1*h)* gesehen haben, ist das gleichbedeutend damit, daß es eine Basis aus nm Matrizen gibt.

Als eine solche Basis wählen wir die Menge aller Matrizen E_{ij}, die so definiert sind, daß E_{ij} an der Stelle ij eine Eins stehen hat und sonst lauter Nullen.

In $k^{4\times 5}$ wäre also etwa $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

In einem beliebigen $k^{n\times m}$ läßt sich jede Matrix eindeutig als Linearkombination der E_{ij} schreiben, denn

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} E_{ij} \,,$$

und ist

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} E_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix}$$

die Nullmatrix, so müssen offensichtlich alle λ_{ij} verschwinden, die E_{ij} sind also auch linear unabhängig. Damit bilden sie eine Basis von $k^{n\times m}$, und $\dim_k k^{n\times m} = nm$.

∎

Die Basis mit den Matrizen E_{ij} ist zwar sicherlich die einfachste Basis für den Vektorraum aller $n \times m$-Matrizen, aber nicht immer die beste: Matrizen bieten sich beispielsweise auch an, um digitalisierte Bilder darzustellen, und zumindest in digitalen Kameras oder Scannern entsteht das Bild wirklich als eine Matrix von Grauwerten *bzw.* als drei Matrizen von Farb- oder sonstigen Werten, dargestellt in der Basis aus den E_{ij}. Für die Übertragung oder Speicherung ist das aber selten optimal, da hier für jede Komponente der Basisdarstellung dieselbe Genauigkeit erforderlich ist. Daher werden die Bilder etwa für die Speicherung im JPEG-Format zunächst in eine andere Basis umgerechnet, bezüglich derer viele Koeffizienten nahe bei Null liegen. Bei der Diskretisierung und Quantisierung enstehen dann viele Koeffizienten, für die nur wenige oder gar keine Bit benötigt werden, was im Zusammenspiel mit anderen Verfahren wie *run length encoding* und HUFFMAN-Codierung zu Komprimierungsfaktoren um die zwanzig oder dreißig ohne nennenswerten Qualitätsverlust führt.

Auch für zwei lineare Abbildungen $\varphi, \psi \colon V \to W$ können wir eine

Summe definieren, und für $\lambda \in k$ auch ein Produkt $\lambda\varphi$ durch

$$\varphi + \psi\colon \begin{cases} V \to W \\ \vec{v} \mapsto \varphi(\vec{v}) + \psi(\vec{v}) \end{cases} \quad \text{und} \quad \lambda\varphi\colon \begin{cases} V \to W \\ \vec{v} \mapsto \lambda\varphi(\vec{v}) \end{cases};$$

sind V und W endlichdimensional und sind A, B die Abbildungsmatrizen von φ, ψ, so hat $\varphi + \psi$ offenbar die Abbildungsmatrix $A + B$ und λA ist die von $\lambda\varphi$.

Auch hier ist klar, daß die sämtlichen linearen Abbildungen $V \to W$ einen Vektorraum bilden, da einfach für jeden Vektor $\vec{v} \in V$ die Vektorraumoperationen von W auf die Bildvektoren angewendet werden; dieser Vektorraum wir mit $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ bezeichnet nach dem Wort *Homomorphismus,* das man gelegentlich anstelle von *lineare Abbildung* gebraucht.

Im endlichdimensionalen Fall hat $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ wegen der eineindeutigen Entsprechung von linearen Abbildungen und Matrizen als Dimension das Produkt der Dimensionen von V und von W. Die Basismatrix $E_{ij} \in k^{n\times m}$ entspricht dabei bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W jener linearen Abbildung, die alle Vektoren aus $\mathcal{B}$ mit Ausnahme des j-ten auf den Nullvektor abbildet; der j-te Basisvektor geht auf den i-ten Basisvektor aus $\mathcal{C}$. Bei den linearen Abbildungen $k^5 \to k^4$ etwa entspräche obige Matrix E_{23} der linearen Abbildung

$$k^5 \to k^4; \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lineare Abbildungen lassen sich nicht nur addieren und mit Skalaren multiplizieren; sie lassen sich auch, wie alle Abbildungen, hintereinanderausführen: Sind $\psi\colon U \to V$ und $\varphi\colon V \to W$ lineare Abbildungen, so ist auch

$$\varphi \circ \psi\colon U \to W; \quad \vec{v} \mapsto \varphi\big(\psi(\vec{v})\big)$$

eine lineare Abbildung.

Falls alle beteiligten Vektorräume endlichdimensional sind, können wir endliche Basen wählen; das seien etwa

$$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\} \subset U, \quad \mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\} \subset V$$

und

$$\mathcal{D} = \{\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_p\} \subset W,$$

d.h.

$$\dim_k U = m, \quad \dim_k V = n \quad \text{und} \quad \dim_k W = p.$$

Dann haben wir Abbildungsmatrizen $A \in k^{p\times n}$ von φ und $B \in k^{n\times m}$ von ψ; wir wollen die Abbildungsmatrix $C \in k^{p\times m}$ von $\varphi \circ \psi\colon U \to W$ berechnen.

Nach Definition der Abbildungsmatrizen $A = (a_{ij})$ von φ und $B = (b_{j\ell})$ von ψ ist

$$\varphi \circ \psi(\vec{b}_i) = \varphi\big(\psi(\vec{b}_i)\big) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji}\vec{c}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\varphi(\vec{c}_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \sum_{\ell=1}^{p} a_{\ell j}\vec{d}_\ell = \sum_{\ell=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} b_{ji}\right) \vec{d}_\ell.$$

Für die Abbildungsmatrix $C = (c_{i\ell})$ von $\varphi \circ \psi$ ist nach Definition

$$\varphi \circ \psi(\vec{b}_i) = \sum_{\ell=1}^{p} c_{\ell i}\vec{d}_\ell,$$

also ist

$$c_{\ell i} = \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} b_{ji}.$$

Definition: Für zwei Matrizen $A = (a_{i\ell}) \in k^{p\times n}$ und $B = (b_{\ell j}) \in k^{n\times m}$ bezeichnen wir die Matrix $C = (c_{ij}) \in k^{p\times m}$ mit

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}$$

als *Produktmatrix* $C = AB$ von A und B.

Für praktische Rechnungen empfiehlt es sich als Eselsbrücke, den zweiten Faktor des Produkts höher zu stellen nach dem Schema

$$\begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{mj} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cdots & \sum_{\ell=1}^{m} a_{i\ell} b_{\ell j} & \cdots \end{pmatrix} \quad ;$$

dadurch behält man den Überblick, welcher Rechenschritt jeweils als nächster auszuführen ist.

Im Gegensatz zu den meisten bislang aufgetretenen Produkten ist dieses Matrixprodukt im allgemeinen *nicht* kommutativ: Falls nicht zufälligerweise $n = p$ sein sollte, ist das Matrixprodukt BA nicht einmal definiert, geschweige denn gleich AB. Allgemein ist Kommutativität bei der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine sehr seltene Ausnahmeerscheinung; schließlich ist auch $\sin(x^2) \neq \sin^2 x$ für fast jedes x, und so ist auch bei Matrizen, selbst wenn beide Produkte definiert sind, im allgemeinen $AB \neq BA$. Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ansonsten gelten aber doch die meisten bekannten Rechenregeln, beispielsweise das *Assoziativitätsgesetz*

$$A(BC) = (AB)C \quad \text{für alle } A \in k^{n\times m},\ B \in k^{m\times p},\ C \in k^{p\times q} .$$

Es ist durchaus möglich (und verglichen mit manch anderen Dingen sogar nicht einmal so extrem aufwendig), dieses Gesetz nach obiger Formel explizit nachzurechnen. Bevor wir uns das antun, sollten wir uns aber daran erinnern, wo das Matrixprodukt eigentlich herkommt:

Matrizen entsprechen umkehrbar eindeutig linearen Abbildungen, und das Matrixprodukt entspricht deren Hintereinanderausführung. Für die Hintereinanderausführung von Abbildungen (egal ob linear oder nicht) ist das Assoziativgesetz aber trivial: Sind etwa

$$\varphi\colon k^m \to k^n, \quad \psi\colon k^n \to k^p \quad \text{und} \quad \omega\colon k^q \to k^p$$

drei lineare Abbildungen mit Abbildungsmatrizen A, B, C, so ist für jeden Vektor $\vec{v} \in k^q$ sowohl

$$\big(\varphi \circ (\psi \circ \omega)\big)(\vec{v}) = \varphi\big(\psi \circ \omega)(\vec{v})\big) = \varphi\Big(\psi\big(\omega(\vec{v})\big)\Big)$$

als auch

$$\big((\varphi \circ \psi) \circ \omega\big)\big(\vec{v}\big) = (\varphi \circ \psi)\big(\omega(\vec{v})\big) = \varphi\Big(\psi\big(\omega(\vec{v})\big)\Big) ,$$

d.h. für die Hintereinanderausführung von Abbildungen (egal ob linear oder nicht) ist das Assoziativgesetz

$$\varphi \circ (\psi \circ \omega) = (\varphi \circ \psi) \circ \omega$$

automatisch erfüllt.

Da nun $A(BC)$ die Abbildungsmatrix von $\varphi \circ (\psi \circ \omega)$ ist und $(AB)C$ die von $(\varphi \circ \psi) \circ \omega$, und da diese beiden Abbildungen übereinstimmen, müssen auch die Abbildungsmatrizen gleich sein, wir haben also gezeigt, daß

$$A(BC) = (AB)C \quad \text{für alle } A \in k^{n\times m},\ B \in k^{m\times p},\ C \in k^{p\times q} ,$$

ohne daß wir ein einziges Matrixprodukt explizit ausrechnen mußten.

Genauso folgen auch die Rechenregeln

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 \quad \text{und} \quad (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$$

aus den entsprechenden Rechenregeln

$$\varphi \circ (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \circ \psi_1 + \varphi \circ \psi_2 \quad \text{und} \quad (\varphi_1 + \varphi_2) \circ \psi = \varphi_1 \circ \psi + \varphi_2 \circ \psi ,$$

die sich wiederum leicht und ohne Rechnung überprüfen lassen:

$$\begin{aligned} \big(\varphi \circ (\psi_1 + \psi_2)\big)(\vec{v}) &= \varphi\big(\psi_1(\vec{v}) + \psi_2(\vec{v})\big) = \varphi\big(\psi_1(\vec{v})\big) + \varphi\big(\psi_2(\vec{v})\big) \\ &= (\varphi \circ \psi_1)(\vec{v}) + (\varphi \circ \psi_2)(\vec{v}) = (\varphi \circ \psi_1 + \varphi \circ \psi_2)(\vec{v}) \end{aligned}$$

und

$$\big((\varphi_1+\varphi_2)\circ\psi\big)(\vec v) = (\varphi_1+\varphi_2)\big(\psi(\vec v)\big) = \varphi_1\big(\psi(\vec v)\big) + \varphi_2\big(\psi(\vec v)\big)$$
$$= (\varphi_1\circ\psi)(\vec v) + (\varphi_2\circ\psi)(\vec v) = (\varphi_1\circ\psi + \varphi_2\circ\psi)(\vec v)\,.$$

Da in der obigen Formel für die Matrixmultiplikation alle $b_{\ell j}$ linear in den Ausdrücken für c_{ij} vorkommen *usw.,* hätten sich die beiden letzen Rechenregeln auch einfach direkt nachrechnen lassen. Ebenfalls durch direktes Nachrechnen überzeugt man sich von der Formel

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B) \quad \text{für alle } \lambda \in k\,.$$

folgt wohl am einfachsten durch direktes Nachrechnen und für die *Einheitsmatrix*

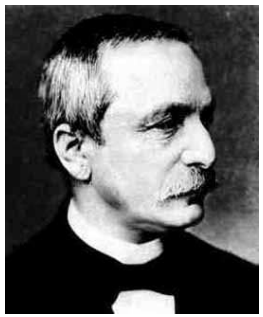
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in k^{n\times n}$$

folgt ebenfalls sofort durch Nachrechnen wie auch durch Interpretation von E als Abbildungsmatrix der identischen Abbildung $k^n \to k^n$, die jeden Vektor auf sich selbst abbildet, daß

$$A\cdot E = A \quad \text{und} E\cdot A = A \qquad \text{für alle } A \in k^{m\times n}$$

ist. Den Eintrag an der Stelle ij der Einheitsmatrix bezeichnet man als das KRONECKER-δ:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}\,.$$



LEOPOLD KRONECKER (1823–1891) ist heute zwar vielen nur im Zusammenhang mit dem KRONECKER-δ bekannt, er war aber einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker seiner Zeit. Seine Arbeiten befaßten sich mit Algebra, Zahlentheorie und Analysis, wobei er insbesondere die Verbindungen zwischen der Analysis und den beiden anderen Gebieten erforschte. Bekannt ist auch seine Ablehnung jeglicher mathematischer Methoden, die, wie die Mengenlehre oder Teile der Analysis, unendliche Konstruktionen verwenden. Er war deshalb mit vielen anderen bedeutenden Mathematikern seiner Zeit verfeindet, z.B. mit CANTOR und mit WEIERSTRASS

Bei den reellen Zahlen und auch sonst in jedem Körper gibt es zu jedem Element $a \neq 0$ ein inverses Element a^{-1}, so daß $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ ist. Bei Matrizen muß es das selbst für quadratische Matrizen nicht geben: Für eine beliebige Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\,,$$

was beides offensichtlich nie die Einheitsmatrix sein kann.

Definition: Eine $n\times n$-Matrix $A \in k^{n\times n}$ heißt *invertierbar,* wenn es eine Matrix $B \in k^{n\times n}$ gibt, so daß $AB = BA = E$ ist. B heißt inverse Matrix von A; in Zeichen $B = A^{-1}$.

(Es wäre theoretisch möglich, Invertierbarkeit auch für nicht-quadratische Matrizen zu definieren, aber das hat keinen sonderlichen Nutzen.)

Um zu sehen, wann eine Matrix $A \in k^{n\times n}$ invertierbar ist, betrachten wir wieder die Situation bei den linearen Abbildungen: Zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon k^n \to k^n$ gibt es genau dann eine Umkehrabbildung $\psi\colon k^n \to k^n$, so daß $\varphi\circ\psi$ und $\psi\circ\varphi$ beide die identische Abbildung sind, wenn φ bijektiv ist. Nach dem Korollar am Ende von §1*i)* ist dies genau dann der Fall, wenn φ surjektiv ist, wenn also das Bild von φ Dimension n hat. Dieses Bild wird aber erzeugt von den Bildern der Einheitsvektoren, und das sind gerade die Spalten der Abbildungsmatrix. Diese n Vektoren erzeugen genau dann ganz k^n, wenn sie linear unabhängig sind.

Definition: Der (Spalten-)Rang einer Matrix $A \in k^{n\times m}$ ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A.

Nach obiger Diskussion gilt daher

Lemma: Eine Matrix $A \in k^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn sie Rang n hat. Die inverse Matrix $B = A^{-1}$ ist sowohl durch die Bedingung $AB = E$ als auch durch die Bedingung $BA = E$ eindeutig bestimmt.

Die Eindeutigkeit der inversen Matrix folgt dabei natürlich aus der Eindeutigkeit der Umkehrabbildung.

c) Matrixdarstellung der komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen bilden mit ihrer üblichen Addition und der Einschränkung der üblichen Multiplikation zu einer Abbildung

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ (r, z) \mapsto rz \end{cases}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum und die Abbildung

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto cz$$

ist für jede komplexe Zahl $c = a + ib \in \mathbb{C}$ insbesondere eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Wählen wir $\{1, i\}$ als $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$, so bildet sie die beiden Basisvektoren 1 und i ab auf

$$c \cdot 1 = a + bi \quad \text{und} \quad c \cdot i = ai + bi^2 = -b + ai\,;$$

sie hat also die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Die Hintereinanderausführung zweier solcher Abbildungen entspricht der Multiplikation der entsprechenden komplexen Zahlen; insbesondere gehört also das Produkt $(a + ib)(a' + ib')$ zweier komplexer Zahlen zur Produktmatrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}.$$

Der Körper der komplexen Zahlen kann damit auch identifiziert werden mit der Menge aller reeller 2×2-Matrizen der obigen Form mit der Matrixaddition und dem Matrixprodukt. Man beachte, daß das Produkt zweier Matrizen dieser speziellen Form kommutativ ist, denn die Multiplikation komplexer Zahlen ist kommutativ.

Ganz entsprechend kann man auch die Elemente der Körper $\mathbb{F}_{2^n}$ mit $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{F}_4$ identifizieren; nimmt man $1, \alpha$ als Basisvektoren, entsprechen beispielsweise die vier Elemente $0, 1, \alpha$ und $\alpha + 1$ des

Körpers $\mathbb{F}_4$ den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und für $\mathbb{F}_{32}$ mit $\mathbb{F}_2$-Basis $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ und Relation $\alpha^5 = \alpha^2 + 1$ entspricht α der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Die meisten kennen wohl aus der Schule zumindest Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme in bis zu drei Unbekannten, teilweise vielleicht auch für Systeme aus beliebig vielen Gleichungen in beliebig vielen Unbekannten.

Der GAUSS-Algorithmus, mit dem wir uns hier beschäftigen wollen, bestimmt die Lösungsmenge eines beliebigen linearen Gleichungssystems, und falls das Gleichungssystem nicht gerade eine spezielle Gestalt hat, liefert er sie im allgemeinen auf die effizienteste Art und Weise.

Die Grundidee seines Verfahrens zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist sehr einfach: Im Falle einer einzigen Gleichung mit einer einzigen Unbekannten x können wir das „Gleichungssystem“

$$ax = b$$

sofort lösen: Für $a \neq 0$ ist $x = -b/a$, d.h. $\mathcal{L} = \{-b/a\}$; ansonsten gibt es für $b \neq 0$ keine Lösung, d.h. $\mathcal{L} = \emptyset$, und für $a = b = 0$ ist jedes x aus k eine Lösung, d.h. $\mathcal{L} = k$.

Das GAUSSsche Eliminationsverfahren führt ein allgemeines lineares Gleichungssystem sukzessive zurück auf solche lineare Gleichungen in einer Unbekannten, ausgehend von zwei trivialen Beobachtungen:

1. Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ändert sich nicht, falls wir zwei Gleichungen miteinander vertauschen.

2. Die Lösungsmenge ändert sich auch dann nicht, wenn wir ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren, d.h. wenn wir die Gleichung

$$\ell_j(x_1,\ldots,x_m) \underset{\text{def}}{=} a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jm}x_m = b_j$$

ersetzen durch

$$\ell_j(x_1,\ldots,x_m) + \lambda\ell_i(x_1,\ldots,x_m) = b_j + \lambda b_i\,, \qquad (*)$$

denn unter der Nebenbedingung

$$\ell_i(x_1,\ldots,x_m) = b_i$$

ist $(*)$ äquivalent zu $\ell_j(x_1,\ldots,x_m) = 0$.

Mit Hilfe dieser beiden Beobachtungen läßt sich nun die Variablenanzahl wie folgt sukzessive reduzieren: Beginnen wir mit der Elimination von x_1. Falls x_1 im Gleichungssystem überhaupt nicht vorkommt, falls also alle $a_{i1} = 0$ sind, gibt es nichts zu tun: Wir haben ein Gleichungssystem in $x_2,\ldots,x_m$, und für jede Lösung $(x_2,\ldots,x_m)$ dieses Systems sowie jedes beliebige $x_1 \in k$ ist $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ eine Lösung des ursprünglichen Systems.

Ansonsten können wir, indem wir nötigenfalls zwei Gleichungen miteinander vertauschen, annehmen, daß $a_{11} \neq 0$ ist. Dann lassen wir die erste Gleichung so stehen, wie sie ist, und ersetzen jede weitere Gleichung $\ell_j(x_1,\ldots x_m) = b_j$ durch

$$\ell_j(x_1,\ldots x_m) - \frac{a_{j1}}{a_{11}}\ell_1(x_1,\ldots x_m) = b_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}}b_1\,;$$

in diesen Gleichungen kommt x_1 offenbar nicht mehr vor. Wir haben somit ein Gleichungssystem in einer Variablen weniger, plus der Gleichung

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1\,.$$

Sobald wir das Gleichungssytem für $x_2,\ldots,x_m$ gelöst haben, wird diese Gleichung nach Einsetzen einer Lösung $(x_2,\ldots,x_m)$ zu einer linearen Gleichung für x_1, die wir lösen können:

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m)}{a_{11}}\,.$$

Das Gleichungssystem für $x_2,\ldots,x_m$ wird nun, falls $m > 2$ ist, nach genau derselben Methode weiterreduziert: Falls x_2 in keiner der Gleichungen vorkommt, haben wir tatsächlich ein Gleichungssystem in $x_3,\ldots,x_m$, andernfalls können wir durch Vertauschen zweier Gleichungen annehmen, daß x_2 in der ersten Gleichung mit einem von Null verschiedenen Vorfaktor auftritt, und wir können wie oben x_2 aus allen weiteren Gleichungen eliminieren *usw.*

Da in jedem Eliminationsschritt ein Nenner auftritt, können die Nenner vor allem bei großem m gelegentlich schnell unübersichtlich groß werden. Obwohl es *im Prinzip* nicht notwendig ist, kann man um dies zu vermeiden noch als dritte Operation die Multiplikation einer Gleichung mit einem Körperelement (z.B. einem Hauptnenner der Koeffizienten) zulassen. Dies ist gleichbedeutend damit, daß man anstelle der Operation $(*)$ allgemeiner die Ersetzung von $\ell_j(x_1,\ldots x_m)$ durch

$$\mu\ell_j(x_1,\ldots x_m) + \lambda\ell_i(x_1,\ldots x_m)$$

mit beliebigem $\mu \neq 0$ aus k zuläßt. ($\mu = 0$ muß hier natürlich unbedingt ausgeschlossen werden, denn sonst läßt sich die Gleichung $\ell_j(x_1,\ldots,x_m) = 0$ aus dem neuen Gleichungssystem nicht mehr herleiten, d.h. wir erhalten auch „Lösungen“, die diese Gleichung nicht erfüllen.) Ein spezieller Fall der Multiplikation einer Gleichung mit einem Körperelement ist das Kürzen durch einen gemeinsamen Teiler der Koeffizienten, wodurch ein Gleichungssystem (egal ob das ursprüngliche oder ein Zwischenresultat) und vor allem der weitere Rechengang oft erheblich übersichtlicher wird.

e) Erste Beispiele

Betrachten wir dazu einige Beispiele; der Grundkörper k sei dabei jeweils der Körper der reellen Zahlen oder einer seiner Teilkörper, etwa $k = \mathbb{Q}$.

Sei zunächst

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_2 & = & 19 \end{array}$$

das zu lösende Gleichungssystem. Da x_1 in der ersten Gleichung tatsächlich vorkommt, müssen wir nichts vertauschen; allerdings müssen wir ein Drittel der ersten Gleichung von der zweiten und fünf Drittel der ersten Gleichung von der dritten subtrahieren, um x_2 aus diesen beiden Gleichungen zu eliminieren, was auf das etwas unangenehme Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & \frac{4}{3}x_2 & + & \frac{11}{3}x_3 & = & \frac{4}{3} \\ & & -\frac{19}{3}x_2 & + & \frac{16}{3}x_3 & = & \frac{32}{3} \end{array}$$

führt. Solche Gleichungssysteme sind zwar nicht immer vermeidbar, aber hier hätten wir es auch einfacher haben können: Wenn wir im ursprünglichen Gleichungssystem die ersten beiden Gleichungen vertauschen, wird es zu

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_2 & = & 19\,, \end{array}$$

und hier müssen wir stattdessen das Dreifache *bzw.* Fünffache der ersten Gleichung von der zweiten *bzw.* dritten subtrahieren, was auf das deutlich angenehmere Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & -4x_2 & - & 11x_3 & = & -4 \\ & & -13x_2 & - & 13x_3 & = & 4 \end{array}$$

führt. Etwas ähnliches hätten wir auch bekommen, wenn wir die letzten beiden Gleichungen des anderen Systems einfach mit drei multipliziert hätten, aber grundsätzlich ist es meistens günstiger, die Gleichung mit dem einfachsten führenden Koeffizienten an erster Stelle zu haben. Auch hier wird das Gleichungssystem zumindest optisch etwas angenehmer, wenn wir die zweite und die dritte Gleichung mit (-1) multiplizieren:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & 4x_2 & & 11x_3 & = & 4 \\ & & 13x_2 & + & 13x_3 & = & -4 \end{array}$$

Uns interessieren zunächst nur die letzten beiden Zeilen. Diese bilden ein lineares Gleichungssystem in x_2 und x_3, aus dem wir x_2 in einer der beiden Gleichungen eliminieren möchten.

Da x_2 in der zweiten Gleichung wirklich vorkommt, subtrahieren wir $13/4$ mal diese Gleichung von der dritten und erhalten als neues System

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & 4x_2 & + & 11x_3 & = & 4 \\ & & & & -\frac{91}{4}x_3 & = & -17\,. \end{array}$$

Hier ist die letzte Gleichung eine gewöhnliche lineare Gleichung für x_3, aus der wir sofort ablesen, daß

$$x_3 = \frac{68}{91}$$

ist. Dies setzen wir in die vorletzte Gleichung ein:

$$4x_2 + \frac{748}{91} = 4$$

ist eine lineare Gleichung für x_2 mit Lösung

$$x_2 = -\frac{96}{91}\,.$$

Dies sowie x_3 setzen wir schließlich in die erste Gleichung ein:

$$x_1 + \frac{80}{91} = 3$$

hat die Lösung

$$x_1 = \frac{193}{91}\,,$$

so daß ingesamt

$$\left(\frac{193}{91}, -\frac{96}{91}, \frac{68}{91}\right)$$

die (einzige) Lösung des Gleichungssystems ist.

Als nächstes Beispiel betrachten wir

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & 5x_3 & & & - & 2x_6 & & & = & 3 \\ & 4x_2 & & + & 2x_4 & & - & 3x_6 & - & 7x_7 & = & -2 \\ x_1 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & = & 0 \end{array}$$

Hier kommt x_1 in der ersten Gleichung nicht vor, wohl aber in der dritten. Wir vertauschen daher die erste Gleichung mit der dritten und erhalten

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & = & 0 \\ & 4x_2 & & + & 2x_4 & & - & 3x_6 & - & 7x_7 & = & -2 \\ & & 5x_3 & & & - & 2x_6 & & & = & 3\,. \end{array}$$

In diesem Gleichungssystem kommt x_1 nur in der ersten Gleichung vor, x_2 nicht mehr hinter der zweiten und x_3 (natürlich) nicht mehr hinter der dritten, wir haben also bereits die Treppengestalt erreicht.

Die dritte Gleichung $5x_3 - 2x_6 = 3$ hat offensichtlich keine eindeutig bestimmte Lösung: Wir können entweder nach x_3 oder nach x_6 auflösen, so daß eine der beiden Unbekannten beliebig bewählt werden kann. Wählen wir etwa für x_6 irgendein Element $\alpha \in k$, so wird

$$x_6 = \alpha, \quad x_3 = \frac{2}{5}\alpha + \frac{3}{5}\,.$$

Die zweite Gleichung wird nach Einsetzen von $x_6 = \alpha$ zu

$$4x_2 + 2x_4 - 3\alpha - 7x_7 = -2\,,$$

also zu einer Beziehung zwischen x_2, x_4 und x_7, denn α ist ein bereits fest gewähltes und somit bekanntes Element des Grundkörpers k. Wieder können wir eine der beiden Variablen willkürlich festlegen, etwa x_7 auf ein $\beta \in k$ setzen und x_4 auf ein $\gamma \in k$; wir erhalten

$$x_7 = \beta, \quad x_4 = \gamma, \quad x_2 = \frac{3}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\,.$$

In der ersten Gleichung schließlich müssen wir alle bereits berechneten oder festgelegten Unbekannten einsetzen und erhalten dann die Gleichung

$$x_1 - 3\gamma + x_5 = 0\,.$$

Hier können wir noch $x_5 = \delta$ beliebig festlegen und erhalten dann für die letzte noch verbleibende Variable

$$x_1 = 3\gamma - \delta\,.$$

Insgesamt hängt die Lösung dieses Gleichungssystems also ab von vier willkürlich wählbaren Körperelementen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$ oder, wie wir auch sagen werden, von vier *Parametern.* Die *Lösungsmenge* $\mathcal{L}$ ist daher die Menge

$$\left\{ \left(3\gamma - \delta, \frac{3}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}, \frac{2}{5}\alpha + \frac{3}{5}, \gamma, \delta, \alpha, \beta \right) \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in k \right\}\,.$$

Im ersten Beispiel brauchten wir von den beiden Operationen des GAUSS-Algorithmus nur den Eliminationsschritt, im zweiten nur den

Vertauschungsschritt. Als nächstes betrachten wir ein Beispiel, in dem beide notwendig sind, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & - & 3x_6 & = & 15 \\
4x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \\
6x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & 10x_4 & + & 12x_5 & - & 6x_6 & = & -8
\end{array}$$

Hier kommt x_1 ausgerechnet in der ersten Gleichung nicht vor, dafür aber in allen folgenden; wir müssen also die erste Gleichung mit einer der anderen vertauschen, etwa der zweiten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & - & 3x_6 & = & 15 \\
4x_1 & - & 7x_2 & & & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \\
2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & + & 13x_4 & + & 12x_5 & - & 6x_6 & = & -8
\end{array}$$

Nun kommt x_1 in der zweiten Gleichung nicht mehr vor; aus der dritten, vierten *bzw.* fünften Gleichung kann x_1 eliminiert werden, indem man dreimal, zweimal *bzw.* einmal die erste Gleichung subtrahiert:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
 & & -9x_2 & + & x_3 & + & 17x_4 & + & 18x_5 & - & 9x_6 & = & -21 \\
 & & -3x_2 & & & + & 5x_4 & + & 12x_5 & - & 3x_6 & = & -24 \\
 & & -12x_2 & + & x_3 & + & 22x_4 & + & 30x_5 & - & 12x_6 & = & -44
\end{array}$$

Als nächstes muß x_2 aus der dritten bis fünften Gleichung eliminiert werden; da x_2 in der zweiten Gleichung mit Koeffizient eins vorkommt, müssen wir einfach jenes Vielfache der zweiten Gleichung subtrahieren, das dem jeweiligen x_2-Koeffizienten entspricht. Da hier alle diese Koeffizienten negativ sind, bedeutet dies, daß wir dasjenige Vielfache der zweiten Gleichung *addieren,* das dem Betrag des Koeffizienten entspricht:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
 & & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69 \\
 & & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6 \\
 & & & & x_3 & + & 82x_4 & + & 6x_5 & & & = & 76\,.
\end{array}$$

Hier muß x_3 aus der letzten Gleichung eliminiert werden; dazu muß offenbar einfach die dritte Gleichung subtrahiert werden:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
 & & x_2 & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
 & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69 \\
 & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6 \\
 & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 7\,.
\end{array}$$

Eigentlich sollte man hier schon sehen, was los ist, aber wir rechnen zur Veranschaulichung des GAUSS-Algorithmus trotzdem stur weiter nach Schema F: Danach muß x_4 aus der letzten Gleichung eliminiert werden durch Subtraktion der vorletzten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
 & & x_2 & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
 & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69 \\
 & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6 \\
 & & & & & & & & & 0 & = & 1\,.
\end{array}$$

Damit wird endgültig klar, daß jede Lösung $(x_1, \ldots, x_6)$ des gegebenen Gleichungssystems insbesondere auch die Gleichung $0 = 1$ erfüllen muß, d.h. die Lösungsmenge ist leer.

Nachdem wir soviel Arbeit in dieses Beispiel investiert haben, sollten wir zumindest einen Teil der Rechnungen recyclen zu einem Beispiel, in dem es Lösungen gibt. Dazu muß nur die letzte der fünf ursprünglichen Gleichungen auf der rechten Seite leicht abgeändert werden: Wir betrachten nun das System

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & - & 3x_6 & = & 15 \\
4x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \\
6x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & 10x_4 & + & 12x_5 & - & x_6 & = & \mathbf{-9}\,.
\end{array}$$

Hierauf lassen sich genau dieselben Umformungen anwenden wie oben, anstelle des Systems mit fünfter Gleichung $0 = 1$ führen diese nun aber

auf

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
 & & x_2 & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
 & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69 \\
 & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6 \\
 & & & & & & & & & 0 & = & 0\,.
\end{array}$$

Diese letzte Gleichung ist natürlich für jedes Tupel $(x_1, \ldots, x_6)$ erfüllt. Die vorletzte gibt eine Beziehung zwischen x_4 und x_5, wir können also

$$x_5 = \alpha \in k$$

beliebig wählen und erhalten dann

$$x_4 = -\frac{3}{10}\alpha + \frac{3}{10}\,.$$

Wenn wir dies in die dritte Gleichung einsetzen, bleibt dort nur noch x_3 als Variable stehen, und aus

$$x_3 - \frac{93}{5}\alpha + \frac{93}{5} = 69$$

lesen wir sofort ab, daß

$$x_3 = \frac{93}{5}\alpha + \frac{252}{5}$$

ist. Damit gehen wir in die zweite Gleichung:

$$x_2 - \frac{7}{5}\alpha + x_6 + \frac{3}{2} = 10\,.$$

Hier können wir wieder eine der beiden noch verbliebenen Variablen auf einen beliebigen Wert setzen, etwa

$$x_6 = \beta \in k\,.$$

Dann wird

$$x_2 = \frac{7}{2}\alpha - \beta + \frac{17}{2}\,,$$

was wir schließlich zusammen mit all den anderen bereits berechneten x_i in die erste Gleichung einsetzen können:

$$2x_1 + \frac{11}{5}\alpha + \frac{79}{5} = 12$$

hat die Lösung

$$x_1 = -\frac{11}{10}\alpha - \frac{19}{10}\,.$$

Damit hängt also die allgemeine Lösung dieses linearen Gleichungssystems von zwei frei wählbaren Parametern α und β ab. Sie wird geringfügig übersichtlicher, wenn wir α als $\alpha = 10\gamma$ schreiben; dann ist $\mathcal{L}$ gleich der Menge

$$\left\{ \left(-11\gamma - \tfrac{19}{10}, 35\gamma - \beta + \tfrac{17}{2}, 186\gamma + \tfrac{252}{5}, -3\gamma + \tfrac{3}{10}, 10\gamma, \beta \right) \;\middle|\; \beta, \gamma \in k \right\}.$$

Als nächstes Beispiel wollen wir ein System betrachten, daß von zwar festen, aber nicht numerisch gegebenen Parametern abhängt: Wir betrachten das Gleichstromnetzwerk aus Abbildung zwölf mit bekannten Widerständen $R_1, \ldots, R_5$ und bekanntem Eingangs- und Ausgangsstrom I; gesucht sind die Ströme $I_1, \ldots, I_5$.

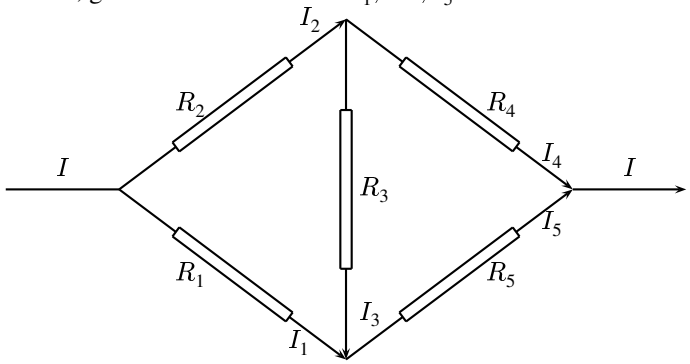


Abb. 12: Ein Gleichstromnetzwerk

Nach den KIRCHHOFFschen Gesetzen müssen sich zunächst an allen Knoten die eingehenden und die ausgehenden Ströme zu Null ergänzen, d.h. wir erhalten die Gleichungen

$$I_1 + I_2 = I = I_4 + I_5$$

für Anfang und Ende sowie

$$I_2 = I_3 + I_4 \quad \text{und} \quad I_1 + I_3 = I_5$$

für oben und unten. Außerdem müssen sich die Spannungen in den beiden Dreiecken zu Null summieren; nach dem OHMschen Gesetz führt dies auf die beiden Gleichungen

$$R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_1 I_1 = 0 \quad \text{und} \quad R_3 I_3 + R_5 I_5 - R_4 I_4 = 0\,.$$

Ordnen wir dies nach den Strömen I_ν, erhalten wir also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
I_1 & + & I_2 & & & & & = & I \\
 & & & & & I_4 & + I_5 & = & I \\
 & & I_2 & - I_3 & - & I_4 & & = & 0 \\
I_1 & & & + I_3 & & & - I_5 & = & 0 \\
-R_1 I_1 & + & R_2 I_2 & + R_3 I_3 & & & & = & 0 \\
 & & & -R_3 I_3 & + R_4 I_4 & - & R_5 I_5 & = & 0\,.
\end{array}$$

Die Elimination von I_1 aus allen Gleichungen ab der zweiten ist einfach: Wir müssen die erste Gleichung von der vierten subtrahieren und ihr R_1-faches zur fünften addieren; das neue System ist

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
I_1 & + & I_2 & & & & & = & I \\
 & & & & & I_4 & + I_5 & = & I \\
 & & I_2 & - I_3 & - & I_4 & & = & 0 \\
 & & -I_2 & + I_3 & & & - I_5 & = & -I \\
 & & (R_1 + R_2) I_2 & + R_3 I_3 & & & & = & R_1 I \\
 & & & -R_3 I_3 & + R_4 I_4 & - & R_5 I_5 & = & 0\,,
\end{array}$$

Da I_2 in der zweiten Gleichung nicht vorkommt, vertauschen wir diese mit der dritten; danach können wir letztere zur vierten addieren und ihr $(R_1 + R_2)$-faches von der fünften subtrahieren, um I_2 aus allen weiteren Gleichungen zu eliminieren.

Damit weiterhin jede Gleichung in eine Zeile paßt, setzen wir zur Abkürzung

$$R_{12} \underset{\text{def}}{=} R_1 + R_2 \quad \text{und} \quad R_{123} \underset{\text{def}}{=} R_1 + R_2 + R_3$$

und erhalten

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} I_1 & + & I_2 & & & & & = & I \\ & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & = & 0 \\ & & & & & & I_4 + I_5 & = & I \\ & & & & & & -I_4 + -I_5 & = & -I \\ & & & & R_{123}I_3 & + & R_{12}I_4 & = & R_1 I \\ & & & & -R_3 I_3 & + & R_4 I_4 - R_5 I_5 & = & 0\,. \end{array}$$

Zur Elimination von I_3 bietet sich an, die dritte Gleichung, in der I_3 nicht vorkommt, mit der sechsten zu vertauschen (diese hat einen einfacheren I_3-Koeffizienten als die fünfte), und dann das R_{123}/R_3-fache dieser Gleichung zur fünften zu addieren. Dazu müssen wir uns allerdings zunächst überlegen, ob das überhaupt zulässig ist: Falls $R_3 = 0$ ist, dürfen wir natürlich nicht durch R_3 dividieren; wenn dieser Fall nicht ausgeschlossen werden kann, muß er also ab hier getrennt behandelt werden.

Im vorliegenden Beispiel wollen wir aber davon ausgehen, daß alle fünf Widerstände tatsächlich vorhanden sind, so daß alle R_i positive reelle Zahlen sind. Dann können wir durch R_3 dividieren und das System wird zu

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} I_1 & + & I_2 & & & & & = & I \\ & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & = & 0 \\ & & & & -R_3 I_3 & + & R_4 I_4 - R_5 I_5 & = & 0 \\ & & & & & & -I_4 + -I_5 & = & -I \\ & & & & & & \alpha I_4 + \beta I_5 & = & R_1 I \\ & & & & & & I_4 + I_5 & = & I \end{array}$$

mit

$$\alpha = R_{12} + \frac{R_4 R_{123}}{R_3} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{-R_5 R_{123}}{R_3}\,.$$

Schließlich muß noch I_4 aus den letzten beiden Gleichungen eliminiert werden; wir addieren also die vierte Gleichung unverändert zur letzten

und ihr α-faches zur vorletzten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} I_1 & + & I_2 & & & & & = & I \\ & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & = & 0 \\ & & & & -R_3 I_3 & + & R_4 I_4 - R_5 I_5 & = & 0 \\ & & & & & & -I_4 + -I_5 & = & -I \\ & & & & & & (\beta-\alpha) I_5 & = & (R_1 - \alpha) I \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Damit können wir nacheinander

$$I_5 = \frac{R_1 - \alpha}{\beta - \alpha} \cdot I\,, \qquad I_4 = I - I_5\,, \qquad I_3 = \frac{R_4 I_4 - R_5 I_5}{R_3}\,,$$
$$I_2 = I_3 + I_4 \qquad \text{und} \qquad I_1 = I - I_2$$

bestimmen, wobei sich der Leser noch überlegen sollte, warum die Division durch $\beta - \alpha$ unproblematisch ist.

Zum Berechnen der Ströme in konkreten Beispielen reicht diese Lösungsformel aus; ist man allerdings an einem symbolischen Ausdruck interessiert, muß man die Definitionen von $\alpha, \beta, R_{12}, R_{123}$ einsetzen und nacheinander alle rechte Seiten auf Ausdrücke nur in I und den R_i reduzieren. Dies ist eine *im Prinzip* einfache Übungsaufgabe in Bruchrechnung, die man allerdings im vorliegenden Fall besser einem Computeralgebrasystem überläßt. Als Ergebnis erhält man die expliziten Formeln

$$I_1 = \frac{\left(R_2R_5 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4\right) \cdot I}{R_1R_5 + R_2R_5 + R_3R_5 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4}$$
$$I_2 = \frac{\left(R_1R_4 + R_1R_5 + R_3R_5 + R_1R_3\right) \cdot I}{R_1R_5 + R_2R_5 + R_3R_5 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4}$$
$$I_3 = \frac{\left(R_1R_4 - R_2R_5\right) \cdot I}{R_1R_5 + R_2R_5 + R_3R_5 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4}$$
$$I_4 = \frac{\left(R_1R_3 + R_1R_5 + R_2R_5 + R_3R_5\right) \cdot I}{R_1R_5 + R_2R_5 + R_3R_5 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4}$$
$$I_5 = \frac{\left(R_2R_3 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4\right) \cdot I}{R_1R_5 + R_2R_5 + R_3R_5 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4}\,,$$

die für die meisten *konkreten* Anwendungen erheblich weniger nützlich sind als die obige Form des Ergebnisses.

Als letztes Beispiel schließlich betrachten wir eines, das auch von einem Parameter abhängt, bei dem man aber *nicht* wie im obigen Beispiel einfach durch Ausdrücke im Parameter dividieren darf. (Eigentlich hätten wir es da auch nicht immer dürfen, aber wir haben einfach angenommen, daß alle Widerstände wirklich vorhanden und damit positiv sind; da Kurzschlüsse immer wieder vorkommen, ist diese Annahme nicht hundertprozentig realistisch.) Das Gleichungssystem hänge ab von einem Paramter $a \in k$ und habe die Form

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ -2x_1 - 2ax_2 - ax_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Ein Computeralgebrasystem findet unschwer die Lösung

$$x_1 = \frac{a^2-3a-1}{a^2-3a+2}, \qquad x_2 = \frac{3}{a^2-3a+2}, \qquad x_3 = \frac{-3}{a-2}\,.$$

Diese „Lösung“ hat aber für $a = 2$ und auch für $a = 1$ Nullen im Nenner, ist dort also nicht erklärt. Für ein Computeralgebrasystem ist das kein Problem: Wie der Name sagt, rechnet es *algebraisch,* und da ist a keine reelle Zahl, sondern ein Symbol, das nichts mit irgendwelchen Zahlen zu tun hat. Damit ist $a-2$ ein formaler Ausdruck, der nie null sein kann, denn das *Symbol* a ist schließlich verschieden von der *Zahl* zwei.

Dieses Rechnen in sogenannten Funktionenkörpern ist mathematisch problemlos, ist aber nicht das, was in den meisten Anwendungen gefragt ist: Dort steht a im allgemeinen für eine variable Größe, in Abhängigkeit von der das Gleichungssystem gelöst werden soll. Man kann sich beispielsweise vorstellen, daß das Gleichungssystem ein lineares Regelungsproblem beschreibt in Abhängigkeit von steuerbaren Größen x_1, x_2 und x_3, wobei die zu steuernden Größen zu

$$x_1 + ax_2 + x_3, \quad x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad -2x_1 - 2ax_2 - ax_3$$

werden. Der Paramter a wäre dann zu interpretieren als eine von außen vorgegebene Umgebungsbedingung (z.B. die Temperatur), und das lineare Gleichungssystem besagt, daß wir das System so regeln wollen,

daß die drei steuerbaren Größen allesamt eins werden – unabhängig von der Außentemperatur.

Bei einer solchen Interpretation können wir natürlich *nicht* einfach durch $a-2$ dividieren; ein Ergebnis, wie $x_3 = -3/(a-2)$ besagt in so einem Fall, daß das Ziel im Falle $a = 2$ nicht erreichbar ist, und das ist ein sehr wichtiges Ergebnis. Bei einem System, das einen Stromkreis beschreibt, könnte das zum Beisiel bedeuten, daß beim Parameterwert $a = 2$ ein Kurzschluß entsteht, so daß dieser Parameterwert unbedingt verhindert werden muß. Deshalb muß man bei einem Gleichungssystem, das ein reales Problem beschreibt, vor jeden Division durch einen parameterabhängigen Ausdruck garantieren, daß dieser Ausdruck von null verschieden ist, und man muß die Fälle, in denen er null wird, gesondert diskutieren.

Im vorliegenden Beispiel (einer Vordiplomsaufgabe vom April 1999) führt dies auf folgende Lösung:

Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten sowie Addition der zweifachen ersten Gleichung zur dritten ergibt

$$\begin{aligned} (a-1)x_2 + x_3 &= 0 \\ (2-a)x_3 &= 3\,. \end{aligned}$$

Für $a = 2$ ist die letzte dieser beiden Gleichungen unlösbar, ansonsten ist

$$x_3 = \frac{3}{2-a} \quad \text{falls} \quad a \neq 2\,.$$

Für $a = 1$ wird die vorletzte Gleichung zu $x_3 = 0$, was der schon gefundenen Lösung

$$x_3 = \frac{3}{2-a} = 1$$

widerspricht; auch dann ist also das Gleichungssystem unlösbar. In allen anderen Fällen erhalten wir

$$x_2 = \frac{3}{(a-1)(a-2)} \quad \text{falls} \quad a \neq 1, 2\,.$$

Schließlich läßt sich noch, beispielsweise aus der zweiten Gleichung des ursprünglichen Systems, x_1 berechnen und wir erhalten als Ergebnis:

Die Lösungsmenge ist

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(1 - \frac{3}{(a-1)(a-2)},\ \frac{3}{(a-1)(a-2)},\ \frac{3}{a-2} \right) \right\} ,$$

falls $a \neq 1, 2$, und

$$\mathcal{L} = \emptyset , \quad \text{falls } a = 1 \text{ oder } a = 2$$

ist.

In einem solchen Fall wird man durch die Nullstellen des Nenners gewarnt, daß hier etwas schiefgehen muß; es gibt aber auch Beispiele, in denen ein Computeralgebrasystem Lösungen schlichtweg „übersieht“: Bertrachten wir etwa das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + \quad & 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ - x_2 + a x_3 &= a + 2 . \end{aligned}$$

Ein Computer findet leicht die Lösung

$$x = 7, \quad y = -2 \quad \text{und} \quad z = 1 .$$

Der GAUSSalgorithmus führt uns aber über das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + \quad & 2x_3 = 9 \\ 3x_2 - 3x_3 &= -9 \\ - x_2 + a x_3 &= a + 2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x_1 + \quad & 2x_3 = 9 \\ x_2 - x_3 &= -3 \\ - x_2 + a x_3 &= a + 2 \end{aligned}$$

auf die Endgestalt

$$\begin{aligned} x_1 + \quad & 2x_3 = 9 \\ x_2 - x_3 &= -3 \\ (a-1)x_3 &= a - 1 , \end{aligned}$$

in der man nur für $a \neq 1$ aus der letzten Gleichung schließen darf, daß $z = 1$ ist; für $a = 1$ haben wir die immer erfüllte Gleichung $0z = 0$. Die Lösungsmenge ist hier also

$$\mathcal{L} = \{(7, -2, 1)\} \quad \text{für } a \neq 1$$

und

$$\mathcal{L} = \{(-2\lambda + 9, \lambda - 3, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{für } a = 1 .$$

Jemand, der Maple hinreichend gut kennt, hätte natürlich auch diese vollständige Lösung damit ermitteln können, aber der einfachstmögliche Befehl reicht definitiv nicht aus – zumindest ein Grund, warum man auch heute noch lernen muß, lineare Gleichungssysteme von Hand zu lösen.

Ein anderer Grund, warum speziell Technische Informatiker das lernen müssen, liegt in der Natur vieler Anwendungen: Lineare Gleichungssysteme müssen beispielsweise gelöst werden bei Steuerungs- und Regelungsproblemen. In vielen Fällen wird diese Steuerung nicht von einem leistungsfähigen Universalrechner durchgeführt, sondern von einer eigens dafür entwickelten Schaltung, die mit möglichst wenig Aufwand arbeiten soll – sei es aus Kostengründen oder wegen des Raumbedarfs oder der Wärmeentwicklung. In solchen Fällen geht es dann darum, die Lösung möglichst effizient zu ermitteln, und bei der Definition des Wortes „effizient“ können hier durchaus auch nichtmathematische Gesichtspunkte eine Rolle spielen. Daher ist es wichtig, das volle Instrumentarium der Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme zu beherrschen, um die jeweils beste Methode implementieren zu können. Deshalb werden wir auch noch Alternativen zum GAUSS-Algorithmus betrachten, und in der *Numerik I* werden weitere Verfahren folgen.

f) Die Struktur der Lösungsmenge

Nach diesen Beispielen ist es an der Zeit, wieder zu den theoretischen Grundlagen zurückzukehren. Sei also wieder

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad &= \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n , \end{aligned}$$

ein allgemeines lineares Gleichungssystem. Wenn wir die a_{ij} zu einer