Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

25. September 2003

Nachklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Vektoren $\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}$ bilden für jede reelle Zahl $\lambda \neq 0$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Lösung: *Falsch,* denn für $\lambda = 1$ sind alle drei Vektoren gleich, können also unmöglich den $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

2) Richtig oder falsch: Ist eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv, so ist sie auch surjektiv.

Lösung: *Richtig,* denn nach der Dimensionsformel ist die Dimension des Bilds gleich zwei minus der Dimension des Kerns, welcher bei einer injektiven Abbildung der Nullraum ist.

3) Welche Dimension hat der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems aus zehn Gleichungen in zwölf Variablen mindestens, welche höchstens?

Lösung: Die Dimension des Lösungsraums ist gleich der Variablenanzahl minus dem Rang der Matrix; da der Rang einer 10×12-Matrix zwischen null und zehn liegt, liegt die Dimension also zwischen zwei und zwölf.

4) Richtig oder falsch: Sind alle Nivealinien der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Geraden, so ist f linear.

Lösung: *Falsch,* beispielsweise hat $f(x, y) = e^{x+y}$ die Geraden $x + y = \ln a$ für $a > 0$ als Niveaulinien.

5) Richtig oder falsch: Die Datenpaare $(k, \frac{1}{k})$ für $k = 1, \dots, 100$ sind positiv korreliert.

Lösung: *Falsch:* Da $1/k$ kleiner wird, wenn k größer wird, sind sie negativ korreliert. ($\kappa \approx -0{,}48$)

6) Richtig oder falsch: Für jede lineare Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist $\Delta f \equiv 0$.

Lösung: *Richtig,* denn Δ ist die Summe der zweiten Ableitungen von f nach den Variablen, und für eine lineare Funktion verschwinden die alle.

7) Das Vektorfeld $\vec{V}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix}yz\\xz\\xy\end{pmatrix}$. Was ist $\operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V}$?

Lösung: Das Nullvektorfeld. Dies folgt entweder daraus, daß für *jedes* Vektorfeld $\vec{V}$ gilt $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} = 0$, oder daraus, daß wir auf quadratische Polynome drei Ableitungsoperatoren anwenden, so daß das Ergebnis unabhängig von deren Form verschwinden muß. Auch kann man leicht nachrechnen, daß für dieses spezielle Vektorfeld bereits rot $\vec{V}$ verschwindet.

Aufgabe 1: *(11 Punkte)*
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei aufgespannt von den Polynomen

$$P_1 = x+1, \quad P_2 = x-1, \quad P_3 = x^2+1, \quad P_4 = x^2-1, \quad P_5 = x^3+1 \quad \text{und} \quad P_6 = x^3-1\,.$$

a) Finden Sie eine Basis von V!

Lösung: Der Vektorraum $\vec{V}$ enthält die Polynome

$$1 = \tfrac{1}{2}(P_1 - P_2), \quad x = \tfrac{1}{2}(P_1 + P_2), \quad x^2 = \tfrac{1}{2}(P_3 + P_4) \quad \text{und} \quad x^3 = \tfrac{1}{2}(P_5 + P_6)\,,$$

und natürlich lassen sich auch alle P_i als Linearkombinationen von $1, x, x^2, x^3$ schreiben. Also ist V einfach der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens drei, und als Basis können wir $\{1, x, x^2, x^3\}$ nehmen.

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift $P \mapsto xP''$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

Lösung: Die zweite Ableitung eines Polynoms P vom Grad höchstens drei ist ein Polynom vom Grad höchstens eins; nach Multiplikation mit x wird der Grad höchstens zwei. Also liegt das Bild von P in V.
Die Linearität der Abbildung folgt daraus, daß Differenzieren eine lineare Operation ist genau wie auch die Multiplikation mit x.

c) Bestimmen Sie Basen von Kern φ und Bild φ!

Lösung: $\varphi(P) = xP''$ verschwindet genau dann, wenn P'' verschwindet, wenn also P höchstens ein lineares Polynom ist. Als Basis des Kerns können wir daher $\{1, x\}$ nehmen.
Die Bilder der Basisvektoren $1, x, x^2, x^3$ von V unter φ sind $0, 0, 2x, 6x^2$; als Basis des Bilds können wir also $\{x, x^2\}$ nehmen.

d) Welche Dimension hat der Durchschnitt von Kern φ und Bild φ?

Lösung: Dieser Durchschnitt besteht nach *c)* genau aus den Vielfachen von x, ist also eindimensional.

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

Lösung: Die Bilder der Basisvektoren sind schon aus *c)* bekannt; da in den Spalten der Abbildungsmatrix die Koeffizienten der Basisdarstellungen dieser Bilder stehen, ist die Abbildungsmatrix gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rl} u + v - w &= 1 \qquad (1)\\ u + v - ax &= 1 \qquad (2)\\ 2u + 3v - 2w - 2x &= 2 \qquad (3)\\ -2u - 4v + 2w + a^2x &= a \qquad (4)\end{array}$$

Lösung: Zur Elimination von u aus den letzen drei Gleichungen subtrahieren wir die erste Gleichung einmal von der zweiten, zweimal von der dritten und addieren sie zweimal zu der vierten:

$$\begin{array}{rl} w - ax &= 0 \qquad (5)\\ v - 2x &= 0 \qquad (6)\\ -2v + a^2x &= a + 2 \qquad (7)\end{array}$$

Das ist schon fast die Endgestalt; wir müssen nur noch v aus der letzten Gleichung eliminieren, indem wir zweimal die vorletzte addieren. Das Ergebnis ist

$$(a^2 - 4)x = a + 2\,.$$

Für $a = \pm 2$ verschwindet der Koeffizient von x; für $a = -2$ verschwindet auch die rechte Seite, für $a = +2$ haben wir die Gleichung $0x = 4$. Somit ist das Gleichungssystem für $a = 2$ unlösbar; für $a = -2$ stellt die gegebene Gleichung keine Bedingung an x, und für $a \neq \pm 2$ können wir durch $a^2 - 4$ dividieren und erhalten

$$x = \frac{a+2}{a^2-4} = \frac{1}{a-2}\,.$$

Die Gleichungen (5) und (6) ergeben nun sofort

$$w = ax \quad \text{und} \quad v = 2x\,,$$

was in die erste Gleichung eingesetzt zu

$$u = 1 - v + w = (a-2)x + 1$$

führt.
Für $a \neq \pm 2$ ist daher

$$w = \frac{a}{a-2}, \quad v = \frac{2}{a-2} \quad \text{und} \quad u = \frac{a-2}{a-2} + 1 = 2\,,$$

während für $a = -2$ der Wert von x eine beliebige reelle Zahl λ sein kann, durch die

$$w = -2\lambda, \quad v = 2\lambda \quad \text{und} \quad u = 1 - 4\lambda$$

festgelegt sind.
Damit ist

$$\mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(2, \frac{2}{a-2}, \frac{a}{a-2}, \frac{1}{a-2}\right)\right\} & \text{für } a \neq \pm 2\\ \left\{(1-4\lambda, 2\lambda, -2\lambda, \lambda \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = -2\\ \emptyset & \text{für } a = 2 \end{cases}.$$

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2-2i \\ i \\ -1-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3-3i \\ 2+2i \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^4$!

Lösung: Wir bestimmen zunächst nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonalbasis: Erster Basisvektor ist $\vec{b}_1 = \vec{v}_1$, den zweiten setzen wir an als $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_1$, wobei λ so gewählt werden muß, daß

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$$

ist. Hier ist

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = |2-2i|^2 + |i|^2 + |-1-i|^2 + |1+2i|^2 = 8+1+2+5 = 16$$

und

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 &= (3-3i)\cdot(2+2i) + (2+2i)\cdot(-i) + (1+i)\cdot(-1+i) + 2i\cdot(1-2i) \\ &= 12 + (2-2i) + (-2) + (4+2i) = 16\,, \end{aligned}$$

also ist $\lambda = -1$ und $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \\ 2+2i \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ müssen noch auf Länge eins normiert werden: Wir wissen bereits, daß $\vec{b}_1 = \vec{v}_1$ die Länge $\sqrt{16} = 4$ hat, und da

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = |1-i|^2 + |2+i|^2 + |2+2i|^2 + 1 = 2+5+8+1 = 16$$

ist, gilt dasselbe für $\vec{b}_2$. Als Elemente einer Orthonormalbasis können wir also die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-2i \\ i \\ -1-i \\ 1+2i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \\ 2+2i \\ -1 \end{pmatrix}$$

nehmen.

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)
Zwischen zwei Größen x und t wird ein Zusammenhang der Form $x(t) = a + b\cos t + c\sin t$ erwartet. Zur Bestimmung der Parameter a, b, c werden hundert Messungen durchgeführt, die zu Wertepaaren (t_n, x_n) führen. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dem die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestmöglichen Schätzwerte für a, b, c genügen!

Lösung: Falls der Zusammenhang perfekt wäre, würden die gesuchten Paramter a, b, c den hundert linearen Gleichungen

$$a + \cos t_i\, b + \sin t_i\, c = x_i$$

genügen; in Matrixform ist dies das LGS

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \cos t_1 & \sin t_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos t_{100} & \sin t_{100} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{100} \end{pmatrix}.$$

Dieses LGS für a, b, c wird praktisch immer unlösbar sein; die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Schätzung erhält man, indem man mit der adjungierten, d.h.

hier im Reellen einfach der transponierten Matrix von A multipliziert: $({}^t\!AA)\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = {}^t\!A\vec{x}$.

Ausgeschrieben wird das zu

$$\begin{pmatrix} 100 & \sum_{i=1}^{100}\cos t_i & \sum_{i=1}^{100}\sin t_i \\ \sum_{i=1}^{100}\cos t_i & \sum_{i=1}^{100}\cos^2 t_i & \sum_{i=1}^{100}\sin t_i\cos t_i \\ \sum_{i=1}^{100}\sin t_i & \sum_{i=1}^{100}\sin t_i\cos t_i & \sum_{i=1}^{100}\sin^2 t_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100} x_i \\ \sum_{i=1}^{100} x_i\cos t_i \\ \sum_{i=1}^{100} x_i\sin t_i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: (*8 Punkte*)

a) Ist die Matrix

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

orthogonal?

Lösung: Man kann entweder direkt nachrechnen, ob ${}^t\!A\cdot A$ die Einheitsmatrix ist, oder aber sich davon überzeugen, daß jeder der vier Spaltenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ Länge eins hat und orthogonal zu jedem anderen ist. Länge eins ist klar, denn wenn man einen der Spaltenvektoren mit sich selbst skalar multipliziert, erhält man stets

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1+1) = \frac{2\times 2}{4} = 1\,.$$

Auch das Verschwinden der Produkte $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j$ ist zumindest in dem Fall trivial, daß einer der beiden Indizes gerade ist und der andere ungerade, denn dann werden bei der Skalarmultiplikation einfach vier Nullen aufsummiert. Sind beide Indizes gerade oder beide ungerade, aber $i\neq j$, so erhalten wir bei der Skalarmultiplikation (abgesehen vom Vorfaktor) eine Summe aus zwei Nullen und $+1$ sowie -1, also ebenfalls null. Somit ist die Matrix orthogonal.

b) Was ist A^{-1}?

Lösung: Für eine orthogonale Matrix ist $A^{-1} = {}^t\!A$, hier also $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

c) Was ist $\det(A)$?

Lösung: Da A orthogonal ist, muß $\det A = \pm 1$ sein; das richtige Vorzeichen bekommen wir aber leider nicht ohne Rechnung. Der Vorfaktor $\frac{\sqrt{2}}{2}$ muß in *jeder* der vier Spalten berücksichtigt werden, führt also bei der Determinante zu einem Faktor $\frac{1}{4}$. Ansonsten können wir, da es bereits recht viele Nullen gibt, beispielsweise nach der ersten Spalte entwickeln:

$$\det A = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{4}\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}\right).$$

Hier bietet sich natürlich an, den ersten Summanden nach der zweiten und den zweiten nach der ersten Zeile zu entwickeln; wir erhalten

$$\det A = \frac{1}{4}\left(\left|\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right|\right) = \frac{1}{4}(-2-2) = -1\,.$$

Aufgabe 6: (*4 Punkte*)
Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^{xy} + \sin(x+y) \end{cases}$ Gradient und HESSE-Matrix!

Lösung: Die Funktion ist offensichtlich mindestens zweimal stetig differennzierbar (sie ist sogar analytisch); es reicht also, die partiellen Ableitungen zu berechnen. Für den Gradienten bekommen wir

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^{xy} + \cos(x+y) \\ f_y(x,y) &= xe^{xy} + \cos(x+y) \\ \nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} ye^{xy} + \cos(x+y) \\ xe^{xy} + \cos(x+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die HESSE-Matrix können wir aus dem SCHWARZschen Lemma folgern, daß $f_{xy} = f_{yx}$ ist, wir müssen also nur eine der beiden gemischten Ableitungen berechnen.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= y^2e^{xy} - \sin(x+y) \\ f_{xy}(x,y) &= xye^{xy} + e^{xy} - \sin(x+y) \\ f_{yy}(x,y) &= x^2e^{xy} - \sin(x+y) \end{aligned}$$

Damit ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} - \sin(x+y) & (xy+1)e^{xy} - \sin(x+y) \\ (xy+1)e^{xy} - \sin(x+y) & x^2e^{xy} - \sin(x+y) \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 7: (*4 Punkte*)
Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades der Funktion

$$f(x,y) = \sin x \cos y + e^{xy}$$

um den Nullpunkt!

Lösung: Wir kennen die TAYLOR-Reihen

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots \\ \cos y &= 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \cdots \\ e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots \quad ; \end{aligned}$$

Wenn wir in der letzten $z = xy$ einsetzen, die ersten beiden miteinander multiplizieren und, nach Streichen aller Terme vom Grad größer drei, die Ergebnisse addieren, erhalten wir

$$T_{3,f}(x,y) = \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2}\right) + (1 + xy) = 1 + x + xy - \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} .$$