Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

29. September 2003

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Menge aller nicht invertierbarer reeller 2×2-Matrizen ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Lösung: *Falsch:* Beispielsweise sind $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beide nicht invertierbar, ihre Summe, die Einheitsmatrix, aber invertierbar.

2) Richtig oder falsch: Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei surjektiv. Dann besteht $\operatorname{Kern}\varphi$ nur aus dem Nullvektor.

Lösung: *Richtig,* denn nach der Dimensionsformel ist $\dim \operatorname{Kern}\varphi = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Bild}\varphi$ gleich null, $\operatorname{Kern}\varphi$ also der Nullvektorraum.

3) In der 10×10-Matrix A sei $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}(i+j) & \text{falls } i \le j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Was ist $\det A$?

Lösung: A ist eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $a_{ii} = \frac{1}{2}(i+i) = i$. Also ist $\det A = 10! = 3628800$.

4) Geben Sie den Kern der linearen Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y \end{cases}$ explizit an!

Lösung: Für $x, y \in \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ ist $x + y = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist. Somit ist $\operatorname{Kern}\varphi = \left\{ \binom{0}{0}, \binom{1}{1} \right\}$.

5) Richtig oder falsch: Die Vektoren $\binom{1}{i}$ und $\binom{-i}{1}$ bilden eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^2$.

Lösung: *Falsch;* denn $\binom{1}{i}\binom{-i}{1} = i + i = 2i$ verschwindet nicht, d.h. die beiden Vektoren stehen nicht senkrecht aufeinander.

6) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mindestens zweimal stetig differenzierbar, so ist Δf gleich der Summe der Diagonaleinträge der Hesse-Matrix H_f.

Lösung: *Richtig,* denn die Diagonaleinträge von H_f sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, und deren Summe ist gerade Δf.

7) Richtig oder falsch: $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen sei stetig differenzierbar, $\vec{V} = \operatorname{grad}\varphi$, und γ sei eine ganz in U liegende geschlossene Kurve. Dann ist $\int_\gamma \vec{V}\,ds = 0$.

Lösung: *Richtig,* denn $\vec{V}$ hat φ als Stammfunktion, so daß für jede durch U verlaufende Kurve γ das Integral gleich $\varphi(\text{Endpunkt}) - \varphi(\text{Anfangspunkt})$ ist.

8) Was ist $\iint_K dx\,dy$ für $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 1 \right\}$?

Lösung: Das ist die Fläche π der Einheitskreisscheibe K.

Aufgabe 1: (*9 Punkte*)

M sei die Menge aller Polynome der Form $x(x-a)(x-b)(x-c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Ist M ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Lösung: Nein, denn zwar liegt beispielsweise für $a = b = c = 0$ das Polynom x^4 in M, aber offensichtlich kann $2x^4$ nicht in der Form $x(x-a)(x-b)(x-c)$ geschrieben werden, da x^4 in einem solchen Produkt stets den Koeffizienten Eins hat.

b) V sei der von M im Vektorraum aller reeller Polynome erzeugte Untervektorraum. Zeigen Sie, daß die Polynome x, x^2, x^3 und x^4 eine Basis von V bilden!

Lösung: Ausmultipliziert wird $P(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$ zu

$$P(x) = x^4 - (a+b+c)x^3 + (ab+bc+ac)x^2 - abc\,x\,,$$

also ist jedes Polynom $P(x)$ als Linearkombination der vier genannten darstellbar. Außerdem liegen alle vier in V:

Für $a = b = c = 0$ ist $P(x) = x^4$, dieses Polynom liegt also sogar in M.

Für $a = b = 0$ und $c = 1$ ist $P(x) = x^3(x-1) = x^4 - x^3$, so daß dieses Polynom in M, also auch in V liegt. Da $x^4 \in V$ und $x^3 = x^4 - (x^4 - x^3)$ als Linearkombination dieser beiden darstellbar ist, liegt auch x^3 in V.

Für $a = 0, b = 1$ und $c = -1$ ist $P(x) = x^2(x^2-1) = x^4 - x^2$; das gleiche Argument wie im vorigen Abschnitt zeigt, daß x^2 in V liegt.

Um nun noch zu zeigen, daß x in V liegt, können wir von irgendeinem Polynom aus M ausgehen, dessen lineares Glied nicht verschwindet, z.B. für $a = b = c = 1$ das Polynom $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$. Da x^4, x^3 und x^2 sowie auch $P(x)$ in V liegen, muß dasselbe auch für $x = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - P(x)$ gelten.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß die vier Polynome x, x^2, x^3 und x^4 natürlich linear unabhängig sind: Ist $\lambda x^4 + \mu x^3 + \nu x^2 + \rho x \equiv 0$ das Nullpolynom, so verschwinden λ, μ, ν, ρ als dessen Koeffizienten.

c) Zeigen Sie: $\varphi\colon \begin{cases} V \to \mathbb{R}^4 \\ P \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \\ f'''(0) \end{pmatrix} \end{cases}$ ist eine lineare Abbildung.

Lösung: Klar, denn sowohl Differenzieren als auch das Einsetzen von Werten in eine Funktion sind lineare Operationen. Ausführlich und formal: Für $f, g \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f + \mu g) &= \begin{pmatrix} (\lambda f + \mu g)(0) \\ (\lambda f + \mu g)'(0) \\ (\lambda f + \mu g)''(0) \\ (\lambda f + \mu g)'''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda f + \mu g)(0) \\ (\lambda f' + \mu g')(0) \\ (\lambda f'' + \mu g'')(0) \\ (\lambda f''' + \mu g''')(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda f(0) + \mu g(0) \\ \lambda f'(0) + \mu g'(0) \\ \lambda f''(0) + \mu g''(0) \\ \lambda f'''(0) + \mu g'''(0) \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \\ f'''(0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g(0) \\ g'(0) \\ g''(0) \\ g'''(0) \end{pmatrix} = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)\,.
\end{aligned}$$

d) Bestimmen Sie Basen von $\operatorname{Kern}\varphi$ und $\operatorname{Bild}\varphi$!

Lösung: $\operatorname{Bild}\varphi$ wird erzeugt von den Bildern der Basisvektoren, also von

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi(x^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

als Basis könnte man die ersten drei dieser Vektoren nehmen oder aber einfach

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere hat Bild φ also die Dimension drei; nach der Dimensionsformel ist daher

$$\dim \operatorname{Kern} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Bild} \varphi = 4 - 3 = 1\,.$$

Wir kennen bereits ein vom Nullpolynom verschiedenes Element von V, das im Kern liegt, nämlich x^4. Damit bildet dieses Polynom eine Basis des Kerns.

e) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis x, x^2, x^3, x^4 von V und der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$?

Lösung: Da in den Spalten der Abbildungsmatrix die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren von V stehen, die wir gerade berechnet haben, ist die Abbildungsmatrix gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Ist diese Abbildungsmatrix invertierbar?

Lösung: Nein, natürlich nicht: Da ihre vierte Spalte nur Nullen enthält, hat sie höchstens (und hier offensichtlich genau) Rang drei.

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 9a \qquad (1)\\ 2x + ay + 2z &= 3a \qquad (2)\\ 3x + y + az &= 2 \qquad\;\; (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten und dreimal von der dritten:

$$\begin{aligned} (a-6)y \phantom{{}+(a-3)z} &= -15a \qquad (4)\\ -8y + (a-3)z &= 2 - 27a \qquad (5) \end{aligned}$$

Für $a = 6$ wird (4) zur unlösbaren Gleichung $0y = -90$, in diesem Fall ist also das Gleichungssystem unlösbar. Andernfalls können wir durch $a - 6$ dividieren und erhalten $y = \dfrac{15}{6-a}$; dies in Gleichung (5) eingesetzt führt auf

$$(a-3)z - \frac{120a}{6-a} = 2 - 27a \quad \text{oder} \quad (a-3)z = 2 - 27a + \frac{120a}{6-a} = \frac{27a^2 - 44a + 12}{6-a}.$$

Für $a = 3$ steht hier $0z = 41$; auch in diesem Fall ist also das Gleichungssystem unlösbar. Für $a \neq 3, 6$ erhalten wir

$$z = \frac{27a^2 - 44a + 12}{(a-3)(6-a)}.$$

Setzen wir dies zusammen mit y in Gleichung (1) ein, folgt

$$x = 9a + \frac{45a}{a-6} + \frac{27a^2 - 44a + 12}{(a-6)(a-3)} = \frac{9a^3 - 9a^2 - 17a + 12}{(a-3)(a-6)} .$$

Somit ist $\mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{ \left(\frac{9a^3-9a^2-17a+12}{(a-3)(a-6)}, \frac{15}{6-a}, \frac{27a^2-44a+12}{(a-3)(6-a)} \right) \right\} & \text{für } a \neq 3, 6 \\ \emptyset & \text{für } a = 3 \text{ und } a = 6 \end{cases} .$

NB: Dieses fürchterliche Ergebnis war natürlich nicht beabsichtigt: Die rechte Seite der ersten Gleichung hätte einfach „9“ sein sollen; dann hätte es eine vernünftige Lösung gegeben.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir müssen zunächst eine Orthonormalbasis des von der Spalten von A aufgespannten Vektorraums finden. Dazu verwenden wir das GRAM-SCHMIDT-Verfahren, wobei wir allerdings gleich versuchen sollten, die Spaltenvektoren von A als Linearkombinationen der Vektoren aus einer Orthonormalbasis darzustellen, d.h. wir sollten in jedem Schritt gleich auf Länge eins normalisieren.

Erster Basisvektor einer Orthogonalbasis wäre nach GRAM-SCHMIDT der erste Spaltenvektor $\vec{a}_1 = \binom{3}{4}$; nach der bekannten Relation $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist $\vec{q}_1 = \binom{3/5}{4/5}$ ein dazu proportionaler Einheitsvektor und somit die erste Spalte von Q. Da $\vec{a}_1$ das fünffache dieses Vektors ist, wird die erste Spalte von R zu $\binom{5}{0}$.

Für die zweite Spalte von Q machen wir den Ansatz

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

(Wir könnten natürlich auch $\vec{q}_1$ hinter λ schreiben, aber dann müßten wir mit Brüchen rechnen.)

Da $\binom{4}{-3} \cdot \binom{3}{4} = 12 - 12 = 0$ verschwindet, können wir $\lambda = 0$ setzen, und da auch $\binom{4}{-3}$ die Länge fünf hat, ist der zweite Vektor $\vec{q}_2$ der Orthonormalbasis und damit auch der zweite Spaltenvektor von Q gleich $\binom{4/5}{-3/5}$.

Damit sind zwei Basisvektoren gefunden; mehr gibt es im $\mathbb{R}^2$ nicht, d.h.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} .$$

Da wir beim zweiten Schritt der GRAM-SCHMIDT-Orthogonalisierung $\lambda = 0$ setzten, ist der zweite Spaltenvektor von A einfach ein Vielfaches von $\vec{q}_2$, hier das fünffache, also ist der zweite Spaltenvektor von R gleich $\binom{0}{5}$.

Um schließlich noch den dritten Spaltenvektor von R zu finden, müssen wir den dritten Spaltenvektor $\binom{7}{1}$ von A als Linearkombination der Spalten von Q schreiben. Hier ist offensichtlich

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} ,$$

der gesuchte Spaltenvektor ist also $\binom{5}{5}$. Somit ist

$$A = QR \qquad \text{mit} \qquad Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 \sin y - y^2 \cos x \end{cases} !$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von SCHWARZ anwenden, wonach $f_{xy} = f_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x \sin y + y^2 \sin x \\ f_y(x,y) &= x^2 \cos y - 2y \cos x \\ f_{xx}(x,y) &= 2 \sin y + y^2 \cos x \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= 2x \cos y + 2y \sin x \\ f_{yy}(x,y) &= -x^2 \sin y - 2 \cos x \end{aligned}$$

ist somit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \sin y + y^2 \sin x \\ x^2 \cos y - 2y \cos x \end{pmatrix}$ und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \sin y + y^2 \cos x & 2x \cos y + 2y \sin x \\ 2x \cos y + 2y \sin x & -x^2 \sin y - 2 \cos x \end{pmatrix} .$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \sin y \\ y^2 \cos x \end{pmatrix} \end{cases} !$$

Lösung: Die erste Komponente $x^2 \sin y$ von $\vec{V}$ hat die partiellen Ableitungen $2x \sin y$ und $x^2 \cos y$; für die zweite Komponente $y^2 \cos x$ erhalten wir entsprechend $-y^2 \sin x$ und $2y \cos x$. Also ist

$$J_{\vec{V}}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \sin y & x^2 \cos y \\ -y^2 \sin x & 2y \cos x \end{pmatrix} .$$

Die Divergenz von $\vec{V}$ ist die Summe der Diagonalelemente der JACOBI-Matrix, also

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y) = 2x \sin y + 2y \cos x .$$

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome vom Grad drei um den Punkt $(0,0)$ von

a) $f(x,y) = e^x \sin y$

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten. Die TAYLOR-Reihen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \quad \text{und} \quad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} - \cdots$$

sind (hoffentlich) wohlbekannt; multipliziert man sie miteinander und läßt alle Terme vom Grad größer drei weg, ergibt sich das gesuchte TAYLOR-Polynom zu

$$T_3(x,y) = y + xy + \frac{x^2y}{2} - \frac{y^3}{6}\,.$$

b) $g(x,y) = \cos(x-y)\sin(x+y)$!

Lösung: Ausgangspunkt sind natürlich die beiden TAYLOR-Reihen

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots \quad \text{und} \quad \sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\ ,$$

in die wir $x-y$ *bzw.* $x+y$ einsetzen müssen. Dabei hilft uns, daß in $(x \pm y)^n$ ausschließlich Monome vom Grad n vorkommen, wir müssen also nur Potenzen mit Exponent höchstens drei berücksichtigen. Das gesuchte TAYLOR-Polynom besteht also aus allen Termen vom Grad höchsten drei des Produkts

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1-(x-y)^2}{2}\right)\left(x+y-\frac{(x+y)^3}{6}\right)\\
&= x+y-\frac{(x-y)^2(x+y)}{2}-\frac{(x+y)^3}{6}+\frac{(x-y)^2(x+y)^3}{24}\,,
\end{aligned}$$

d.h. aus allen Summanden außer dem letzten, und ist somit

$$\begin{aligned}
T_3(x,y) &= x+y-\frac{(x^2-y^2)(x-y)}{2}-\frac{(x+y)^3}{6}\\
&= x+y-\frac{x^3-x^2y-xy^2+y^3}{2}-\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{6}\\
&= x+y-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}y^3\,.
\end{aligned}$$