WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, ZIMMER C 201

# Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15./16. Juli 2003

**Natürlich sind gerade diese Woche mehr noch als sonst auch alle früheren Themenvorschläge und Übungsblätter relevant, eventuell auch die Schein- und Vordiplomsklausuren vergangener Jahre.**

Wie letzte Woche seien

$$\begin{aligned} f_1&:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; & (x,y,z) &\mapsto x^3+y^3+z^3+3xyz \\ f_2&:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; & (x,y) &\mapsto \sin x \cos y \\ f_3&:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; & (x,y) &\mapsto e^{x^2+y^2} \\ f_4&:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; & (x,y) &\mapsto \arctan x + y \end{aligned}$$

*a)* Berechnen Sie die vollständige TAYLOR-Reihe von $f_1$ um den Punkt $(0,0,0)$!

*b)* Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von $f_1$ um den Punkt $(1,0,0)$!

*c)* Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von $f_2$ bis $f_4$ um den Nullpunkt!

*d)* *Richtig oder falsch:* Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die JACOBI-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

*e)* *Richtig oder falsch:* Wenn die Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall und zu jeder beliebigen Ordnung stetige partielle Ableitungen hat, ist sie um jeden Punkt durch eine TAYLOR-Reihe darstellbar.

*f)* *Richtig oder falsch:* Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Falls für $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ überall $\operatorname{grad} f \neq \vec{0}$ ist, kann $f(x,y) = 0$ überall eindeutig nach $y$ aufgelöst werden.

*g)* *Richtig oder falsch:* Die Gleichung $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ ist genau dann in einer Umgebung von $(a_0, \dots a_n, x) \in \mathbb{R}^{n+2}$ eindeutig nach $x$ auflösbar, wenn $x$ eine einfache Nullstelle des Polynoms $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ ist.

*h)* Bestimmen Sie für $F(x,y) = xy - x\sin y \cdot \cos y - 3x - 5$ alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $F(x,y) = 0$ nicht eindeutig nach $y$ aufgelöst werden kann!

*i)* Berechnen Sie für alle Punkte $(x_0, y_0)$, in deren Umgebung $f(x,y) = 0$ eindeutig nach $y$ aufgelöst werden kann, die Ableitung der Funktion $f(x)$, für die dort $F\bigl(x, f(x)\bigr) = 0$ ist.

*j)* Berechnen Sie die JACOBI-Matrix des Vektorfelds $(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ yz+xz+xy \\ xyz \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^3$!

*k)* Bestimmen Sie Divergenz und Rotation von $\vec{V}$!

*l)* *ditto* für $\vec{W}: \mathbb{R}^3 \smallsetminus \bigl\{(0,0,0)\bigr\} \to \mathbb{R}^3; \quad \vec{v} \mapsto \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$!

*m)* Was sind die Divergenz und die Rotation der linearen Funktion

$$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3z \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3z \\ c_0 + c_1x + c_2y + c_3z \end{pmatrix} ?$$

*n)* Berechnen Sie $\operatorname{div}\operatorname{grad} e^{-(x^2+y^2+z^2)}$!

*o)* Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} -y^2-z^2 \\ -x^2-z^2 \\ -x^2-y^2 \end{pmatrix}$!

*p)* Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds $\vec{W}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} yz^2 \\ x^2z \\ xy^2 \end{pmatrix}$!