Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 24./25. Juni 2003

a) *Richtig oder falsch:* Die Spalten der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ seien orthonormal, d.h. jeder Spaltenvektor habe Länge eins und das Produkt zweier verschiedener Spaltenvektoren verschwinde. Dann hat für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ der Vektor $A\vec{v}$ dieselbe Länge wie $\vec{v}$.

b) *Richtig oder falsch:* Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, so ist $iA \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär.

c) *Richtig oder falsch:* Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, so auch iA.

d) Für welche Wahl der Vorzeichen sind die folgenden Matrizen orthogonal *bzw.* unitär?

$$A_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & \pm 4 \\ 4 & \pm 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ 1 & \pm i \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & \pm 1 \\ 1 & \pm i \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & -1 & 1 \\ -1 & \pm 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pm 1 & 1 & 1 \\ -1 & \pm 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die nächsten Themenvorschläge sei V ein Euklidischer oder Hermitescher Vektorraum, $U \leq V$ ein Untervektorraum und $\pi_U : V \to U$ die orthogonale Projektion auf U.

e) *Richtig oder falsch:* $\pi_U(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{v} \in U^\perp$

f) *Richtig oder falsch:* $|\vec{v} \cdot \vec{u}| \leq |\vec{v} \cdot \pi_U(\vec{v})|$ für alle $\vec{u} \in U, \vec{v} \in V$

g) *Richtig oder falsch:* $|\pi_U(\vec{v}| \leq |\vec{v}|$ für alle $\vec{v} \in V$

h) Was ist $\pi_U(\vec{v}) + \pi_{U^\perp}(\vec{v})$?

i) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf $U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$!

j) Zeigen Sie, daß das folgende lineare Gleichungssystem unlösbar ist:

$$x + y = 1, \quad x + 2y = 2 \quad \text{und} \quad 2x + 3y = 4 \qquad (*)$$

k) Finden Sie reelle Zahlen x, y, z, so daß $(*)$ mit diesen Zahlen im Sinne der kleinsten Quadrate möglichst wenig falsch ist!
Variante I: Verwenden Sie den vorletzten Themenvorschlag!
Variante II: Verwenden Sie die allgemeine Theorie aus der Vorlesung!

l) Gegeben seien hundert Meßwerte (x_i, t_i), wobei theoretisch ein Zusammenhang der Form

$$x_i = a \sin t_i + b \sin 2t_i + c \sin 3t_i + d \sin 4t_i$$

bestehen sollte. Stellen sie ein lineares Gleichungssystem auf, dessen Lösungen im Sinne der kleinsten Quadrate die beste Schätzung für a, b, c, d liefern!

m) Wie können Sie vorgehen, wenn ein Zusammenhang der Form $x_i = A\cos(t_i + \varphi)$ zu erwarten ist?