Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 17./18. Juni 2003

a) $\mathbb{C}^2$ sei mit seinem Standard Hermiteschen Produkt ausgestattet. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}i\\ i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\ i\end{pmatrix}!$$

b) *Richtig oder falsch:* $\mathbb{R}^2$ mit dem Produkt $\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=v_1w_2-v_2w_1$ ist ein Euklidischer Vektorraum.

c) Was ändert sich, wenn man stattdessen $|\vec{v}\odot\vec{w}|$ als Produkt nimmt?

d) Welche der folgenden vier Vorschriften definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix}=\begin{cases}(v_1+2v_2)(w_1+2w_2)+4v_3w_3 & (1)\\ (v_1+2v_2)(w_1+2w_2)-4v_3w_3 & (2)\\ v_1w_2+v_2w_3+v_3w_1 & (3)\\ v_1w_1+2v_2w_2+v_3w_3+v_2(w_1+w_3)+(v_1+v_3)w_2 & (4)\end{cases}$$

e) *Richtig oder falsch:* Die Lorentz-Form $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\\ t_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\\ t_2\end{pmatrix}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-c^2t_1t_2$ macht $\mathbb{R}^4$ zum Euklidischen Vektorraum.

f) Gibt es ein Hermitesches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, das nur reelle Werte annimmt?

g) Zeigen Sie: Für zwei beliebige Vektoren $\vec{v},\vec{w}$ eines Euklidischen Vektorraums V gilt: $|\vec{v}+\vec{w}|\le|\vec{v}|+|\vec{w}|$. (*Hinweis:* Quadrieren Sie beide Seiten!)

h) Gilt diese Formel auch für Hermitesche Vektorräume?

i) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $x+2y+5z=0$ des $\mathbb{R}^3$ mit seinem Standardskalarprodukt.

j) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die den Vektor $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ enthält!

k) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\ 3i\\ 6\end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2=\begin{pmatrix}2+3i\\ 4+3i\\ 6+i\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^3$ mit seinem üblichen Hermiteschen Skalarprodukt!

l) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\ 3&2&1&0\\ 0&1&2&3\end{pmatrix}$!