

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 17./18. Juni 2003

a) \mathbb{C}^2 sei mit seinem Standard HERMITESchen Produkt ausgestattet. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} !$$

b) *Richtig oder falsch:* \mathbb{R}^2 mit dem Produkt $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1$ ist ein EUKLIDischer Vektorraum.

c) Was ändert sich, wenn man stattdessen $|\vec{v} \odot \vec{w}|$ als Produkt nimmt?

d) Welche der folgenden vier Vorschriften definiert ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 ?

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} (v_1 + 2v_2)(w_1 + 2w_2) + 4v_3 w_3 & (1) \\ (v_1 + 2v_2)(w_1 + 2w_2) - 4v_3 w_3 & (2) \\ v_1 w_2 + v_2 w_3 + v_3 w_1 & (3) \\ v_1 w_1 + 2v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_2(w_1 + w_3) + (v_1 + v_3)w_2 & (4) \end{cases}$$

e) *Richtig oder falsch:* Die LORENTZ-Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - c^2 t_1 t_2$ macht \mathbb{R}^4 zum EUKLIDischen Vektorraum.

f) Gibt es ein HERMITESches Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n , das nur reelle Werte annimmt?

g) Zeigen Sie: Für zwei beliebige Vektoren \vec{v}, \vec{w} eines EUKLIDischen Vektorraums V gilt: $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$. (*Hinweis:* Quadrieren Sie beide Seiten!)

h) Gilt diese Formel auch für HERMITESche Vektorräume?

i) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $x + 2y + 5z = 0$ des \mathbb{R}^3 mit seinem Standardskalarprodukt.

j) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 , die den Vektor $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält!

k) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 4 + 3i \\ 6 + i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von \mathbb{C}^3 mit seinem üblichen HERMITESchen Skalarprodukt!

l) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} !$