Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 3./4. Juni 2003

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems (aus der Scheinklausur 2002)

$$\begin{array}{rcl} aw + x + 2y + z &=& a+2 \qquad (1)\\ -aw + x - 4y + z &=& a-2 \qquad (2)\\ -aw + 2x + (2a-1)y + 5z &=& 2a+4 \qquad (3)\\ -3aw - 5x + 2ay + az &=& 4-3a \qquad (4) \end{array}$$

b) F_a bezeichne die Menge aller stetiger Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die an der Stelle Null den Wert $a \in \mathbb{R}$ annehmen. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist F_a ein Vektorraum?

c) Finden Sie für vorgegebenes $a \in \mathbb{R}$ einen Vektorraum V, so daß das Paar (F_a, V) ein affiner Raum ist!

d) *Richtig oder falsch:* Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m\times n}$ mit $AB = E$.

e) *Richtig oder falsch:* Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m\times n}$ mit $BA = E$.

f) Bestimmen Sie alle Matrizen X, für die gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$!

g) Berechnen Sie die inversen Matrizen von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & \lambda & 2\\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$!

h) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

i) Berechnen Sie in den invertierbaren Fällen die inverse Matrix A^{-1} !

j) *Richtig oder falsch:* Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

k) *Richtig oder falsch:* Für alle $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

l) *Zeigen Sie:* Falls für zwei invertierbare Matrizen $A, B \in k^{n\times n}$ gilt $AB + BA = 0$, so ist auch $A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1} = 0$.

m) Die lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 2\\ -21 & 11 \end{pmatrix}$. Welche Abbildungsmatrix hat sie bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1\\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2\\ 7 \end{pmatrix}$?