Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6./7. Mai 2003

a) Welche der folgenden Mengen sind, mit der üblichen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen, Körper?

$$k_1 = \mathbb{N}_0,\quad k_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\quad k_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},\quad k_4 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x\},$$
$$k_5 = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\},\quad k_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\},\quad k_7 = \{a + b\sqrt[3]{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

b) Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Vektorräume?

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\},\qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\},$$
$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\},\qquad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy = 0 \right\},$$
$$V_5 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 0 \right\},\qquad V_6 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 2 \right\}$$

c) Richtig oder falsch: Sind $\varphi, \psi\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, so sind auch die Abbildungen $\varphi \pm \psi\colon V \to W$ mit $(\varphi \pm \psi)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) \pm \psi(\vec{v})$ linear.

d) Richtig oder falsch: Die Menge H aller linearer Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ zwischen zwei festen k-Vektorräumen V und W ist selbst ein k-Vektorraum.

e) Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ y+2z \\ z+2 \end{pmatrix},\qquad \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+4z \\ 3x+4y+5z \end{pmatrix},$$
$$\omega\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ xy+yz+xz \\ xyz \end{pmatrix}$$

f) Bestimmen Sie im linearen Fall Kern und Bild der Abbildung!

g) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $V = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

$$U_1 = \{f \in V \mid f(t) = f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\},\quad U_2 = \{f \in V \mid f(t) = -f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\},$$
$$U_3 = \{f \in V \mid f(t) = f(t^2) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\},\quad U_4 = \{f \in V \mid f(t) = f(t+1) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$

h) Zeigen Sie, daß $\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ eine lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie deren Kern und Bild!

i) Zeigen Sie: $W = \{a \sin^2 t + b \cos^2 t + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$!

j) Bestimmen Sie für diesen Vektorraum W den Kern und das Bild der linearen Abbildung

$$\varphi\colon W \to \mathbb{R}^3;\quad f \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\frac{\pi}{2}) \\ f(\pi) \end{pmatrix}\ !$$

k) Bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \{a \sin t + b \sin 2t + c \sin 4t \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^5 \\ f \mapsto \left((f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{2}\right), f(2\pi) \right) \end{cases}\ !$$