Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

25. Juli 2003

13. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Ein konservatives Vektorfeld ist quellenfrei.
2) *Richtig oder falsch:* Falls ein Vektorfeld $\vec{V}$ mit antisymmetrischer Jacobi-Matrix über der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Stammfunktion hat, ist es dort konstant.
3) *Richtig oder falsch:* Falls für zwei Vektorfelder $\vec{V}$ und $\vec{W}$ auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Kurve γ in U gilt $\int_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{x} = \int_\gamma \vec{W} \cdot d\vec{x}$, so ist $\vec{V}(\boldsymbol{x}) = \vec{W}(\boldsymbol{x})$ für alle Kurvenpunkte $\boldsymbol{x} = \gamma(t)$.
4) Was ist das (dreidimensionale) Volumen von $Z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 100,\ |z| \le 1\right\}$?
5) *Richtig oder falsch:* Das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y/(x^2+y^2)}{-x/(x^2+y^2)}$ hat eine Stammfunktion.
6) *Richtig oder falsch:* $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x|+|y| \ge 1\right\}$ ist einfach zusammenhängend.
7) *Richtig oder falsch:* Die Oberfläche einer Kugel ist einfach zusammenhängend.
8) *Richtig oder falsch:* Die Oberfläche eines Torus ist einfach zusammenhängend.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Ein Massenpunkt läuft im ebenen Kraftfeld $\vec{F}(\boldsymbol{x}) = \binom{-y}{x}$ auf einem der beiden Bogen des Einheitskreises von $(-1,0)$ nach $(0,1)$. Berechnen Sie die Arbeit $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\boldsymbol{x}$ für beide Möglichkeiten!

b) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y^2}{x^2}$ längs des Dreiecks mit Ecken $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,0)$!

c) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{W}(x,y) = \binom{x^2y}{xy^2}$ längs der beiden Teilbögen des Einheitskreises, die den Punkt $(1,0)$ mit $(0,1)$ verbinden!

e) Ist eines der Vektorfelder $\vec{F}, \vec{V}, \vec{W}$ konservativ?

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

a) Berechnen Sie für die Kurve $\gamma\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}^3; t \mapsto \left(t - \frac{\ell}{2}, 0, 0\right)$ das Integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{ds}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|}$ für einen festen Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, der nicht auf γ liegt.

b) Wie verhält sich das Integral, wenn $\boldsymbol{x}_0$ gegen einen Punkt auf γ geht?

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie für den Bereich $B \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+4y^2 \le 1\right\}$ die folgenden Integrale:

$$\iint_B x\,dx\,dy, \quad \iint_B xy\,dx\,dy, \quad \iint_B \sqrt{1-x^2-4y^2}\,dx\,dy \quad \text{und} \quad \iint_B \sqrt{x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

b) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y^2}{-x}$ nach dem Satz von Green entlang des Dreiecks mit Ecken $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$!

c) Berechnen Sie nach dem Satz von Gauss das Integral $\displaystyle\iint_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O}$ mit $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 = z,\ 0 \le z \le 1\right\}$!

KEINE ABGABE — FROHE FERIEN !