Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

18. Juli 2003

12. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ seien differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch $f \circ g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar und $J_{f\circ g}(\boldsymbol{x}) = J_g(\boldsymbol{x}) \cdot J_f\big(g(\boldsymbol{x})\big)$.
2) *Richtig oder falsch:* Falls alle zweiten partiellen Ableitungen von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, ist die Jacobi-Matrix von f symmetrisch.
3) *Richtig oder falsch:* Wenn die Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall und zu jeder beliebigen Ordnung stetige partielle Ableitungen hat, ist sie um jeden Punkt durch eine Taylor-Reihe darstellbar.
4) Finden Sie eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$!
5) $\vec{V}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei ein mindestens zweimal differenzierbares Vektorfeld. Was ist $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V}$?

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie für zwei Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ die Divergenz von $\vec{V} \times \vec{W}$ auf möglichst kompakte Weise!
b) Das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ dreier Vektoren ist bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren; insbesondere ist $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Wenden Sie diese Formel an auf die „Vektoren“ $\vec{a} = \nabla, \vec{b} = \vec{V}$ und $\vec{c} = \vec{W}$, und vergleichen Sie mit *a)*!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie: Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ und ein Vektorfeld $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}^3)$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt:

a) $\operatorname{div}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{V} + f \operatorname{div}\vec{V}$
b) $\operatorname{rot}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{V} + f \operatorname{rot}\vec{V}$
c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{V}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{V}) - \begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f_n: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\} \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n} \end{cases}$ für eine beliebige positive reelle Zahl n!
b) Was ist Δf_n?
c) Zeigen Sie: $\Delta f_n \equiv 0 \iff n = \frac{1}{2}$!

Keine Abgabe – am 25. Juli ist Semesterende