

13. Juni 2003

8. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

U sei ein Untervektorraum eines EUKLIDischen Vektorraums V und $\pi_U: V \rightarrow U$ die orthogonale Projektion auf U .

- 1) *Richtig oder falsch:* Für einen Vektor $\vec{v} \in V$ ist $|\vec{v}| = |\pi_U(\vec{v})|$ genau dann, wenn \vec{v} in U liegt.
- 2) *Richtig oder falsch:* Für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ ist $\vec{v} \cdot \vec{v}' = \pi_U(\vec{v}) \cdot \pi_U(\vec{v}')$ genau dann, wenn \vec{v} und \vec{v}' in U liegen
- 3) Was ist $(\pi_{U^\perp} \circ \pi_U)(\vec{v})$?
- 4) Was ist $\pi_U \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ für $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$?

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Zu jedem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\vec{v}| = 1$ gibt es einen Winkel α , so daß $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ist!
- b) Zeigen Sie: Zu jeder orthogonalen 2×2 -Matrix $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ gibt es einen Winkel φ , so daß $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ oder $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$ ist! (*Hinweis:* Verwenden Sie die Additionsregeln für trigonometrische Funktionen!)
- c) Bestimmen Sie alle unitären 1×1 -Matrizen!

Aufgabe 3: (6 Punkte)

- a) Der CPI für Deutschland hatte in den letzten Jahren folgende Werte:

| | | | | | | | | | | |
|-------|-----------|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Jahr: | 1980–1985 | 1988–1992 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 |
| CPI: | 8,14 | 8,13 | 8,14 | 8,27 | 8,23 | 7,9 | 8,0 | 7,6 | 7,4 | 7,3 |

Berechnen Sie die Ausgleichsgerade für diese Daten und diskutieren Sie, wie gut diese die Zeitabhängigkeit des CPI qualitativ beschreibt!

- b) Zwischen zwei Größen x, y wird ein Zusammenhang der Form $y = ax^2 + bx + c$ erwartet. Gemessen wurden $N \geq 10$ Wertepaare (x_i, y_i) . Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Schätzung der Koeffizienten a, b, c auf!

Abgabe bis zum Freitag, dem 20. Juni 2003, um 12.00 Uhr