Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

9. Mai 2003

2. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

$\varphi: V \to W$ sei eine lineare Abbildung und $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ sei eine Teilmenge von V.

1) *Richtig oder falsch:* Ist $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{\varphi(\vec{v}_1), \ldots, \varphi(\vec{v}_n)\}$.
2) *Richtig oder falsch:* Ist $\{\varphi(\vec{v}_1), \ldots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ linear unabhängig, so auch $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$.
3) *Richtig oder falsch:* $\mathcal{B}$ sei eine Basis des Vektorraums V und $M \subset B$ sei eine Teilmenge von $\mathcal{B}$. Dann ist M eine Basis von $[M]$.
4) *Richtig oder falsch:* Der Durchschnitt zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.
5) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.
6) *Richtig oder falsch:* Sind U_1 und U_2 Untervektorräume von V mit Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$, so ist $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind!

b) Finden Sie drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, so daß $[\vec{u}, \vec{v}] = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = 0 \right\}$ für diese beiden Vektoren!

c) Zeigen Sie: Für jeden Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $ap + bq + cr \neq 0$ ist $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$!

Aufgabe 2: (*4 Punkte)*

a) Welche Dimension hat der Vektorraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\} \leq \mathbb{R}^3$?
b) Bestimmen Sie eine Basis von U!
c) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums

$$U = \left[\sinh t, \cosh t, \sinh^2 t, \cosh^2 t, e^{-2t}, e^{-t}, 1, e^t, e^{2t}\right] \leq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) !$$

Dabei ist $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ und $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

b) Zeigen Sie: Das Bild der linearen Abbildung $\varphi: U \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f \mapsto \dfrac{df}{dt}$ liegt in U.
c) Bestimmen Sie eine Basis das Bilds von φ!

Abgabe bis zum Freitag, dem 16. Mai 2003, um 12.00 Uhr