WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6,26, A4.18

6. Juni 2019

Modulklausur Funktionentheorie I

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen, die den angegebenen Gleichungen genügen, und geben Sie die Ergebnisse in der Form $x + iy$ an mit $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $z = (2+3i)(4i-1)$ *b)* $z = \dfrac{2+3i}{4i-1}$ *c)* $z^2-2z+4-2i+2iz = 0$ *d)* $z^2 = i^{99}$ *e)* $z^8 = 1$

Lösung:

a) $z = (2+3i)(4i-1) = 2\cdot(-1) - 3\cdot 4 + 2\cdot 4i - 2i = -14 + 6i$

b) $z = \dfrac{2+3i}{4i-1} = \dfrac{(2+3i)(-4i-1)}{4^2+1^2} = \dfrac{10-11i}{17} = \dfrac{10}{17} + \dfrac{11}{17}i$

c) $z^2-2z+4-2i+2iz = z^2-(2-2i)z+4-2i = \big(z-(1-i)\big)^2-(1-i)^2+4-2i = \big(u-(1-i)\big)^2+4$ verschwindet genau dann, wenn $z-(1-i) = \pm 2i$ ist, also $z = 1+i$ oder $z = 1-3i$.

d) $z^2 = i^{99}$ ist gleichbedeutend mit $z^2 = -i$, denn $i^4 = 1$, $99 = 24\cdot 4+3$ und $i^3 = i^2\cdot i = -i$. In Polarkoordinaten ist $-i = e^{3\pi i/2}$, also ist $e^{3\pi i/4}$ eine der beiden Quadratwurzeln. Diese Zahl liegt auf der zweiten Winkelhalbierenden und hat den Betrag eins; daher ist $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$. Die andere Lösung ist natürlich $-z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

(Alternativ weiß man von *c)*, daß $(1-i)^2 = -2i$ ist, und muß dann nur noch durch $\sqrt{2}$ dividieren, um eine Lösung zu erhalten.)

e) Die Lösungen dieser Gleichung sind die achten Einheitswurzeln. Diese bilden ein regelmäßiges Achteck im Einheitskreis, dessen Ecken auf den beiden Koordinatenachsen und den beiden Winkelhalbierenden liegen. Somit ist

$$z \in \left\{1, -1, i, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(i-i)\right\}.$$

Aufgabe 2: (*12 Punkte*)

a) Entscheiden Sie für jede der angegebenen Teilmengen von $\mathbb{C}$, welche der Eigenschaften *offen, abgeschlossen, zusammenhängend, kompakt* sie hat! Falls es sich um ein Gebiet handelt, geben Sie bitte an, ob es einfach zusammenhängend ist. Alle Aussagen müssen begründet werden!

$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re z| > 1\}$ $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re z| \le 1\}$ $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$
$M_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le |z| < 1\}$ $M_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ $M_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le |z| \le 1\}$

Lösung: Wenn der Betrag des Realteils größer als eins sein soll, muß der Realteil selbst entweder größer als eins oder kleiner als minus eins sein. M_1 ist daher die Vereinigung der beiden Mengen $M_1^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 1\}$ und $M_1^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z < -1\}$. Da die Abbildung $z \mapsto \Re z$ stetig ist und sowohl $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ als auch $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, folgt, daß M_1^+ und M_1^- beide offen sind, und damit ist auch ihre Vereinigung M_1 offen. M_1 ist nicht abgeschlossen, da alle Punkte z mit $\Re z = \pm 1$ zwar Randpunkte, nicht aber Elemente von M_1 sind. M_1 ist offensichtlich unbeschränkt (Die Imaginärteile können beliebig groß werden), also nicht kompakt. M_1 ist auch nicht zusammenhängend, denn M_1^+ und M_1^- sind disjunkte nichtleere offene Teilmengen, deren Vereinigung M_1 ist. Als unzusammenhängende Menge ist M_1 kein Gebiet.

M_2 ist offensichtlich das Komplement von M_1, also abgeschlossen und nicht offen. Geometrisch ist diese Menge ein Streifen der Breite zwei um die imaginäre Achse, also konvex und damit wegzusammenhängend und erst recht zusammenhängend. Wie M_1 ist auch M_2 nicht kompakt, da die Imaginärteile beliebig groß werden können. Da die Menge nicht offen ist, ist sie kein Gebiet.

M_3 ist das Komplement der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, also offen und nicht abgeschlossen, da die Randpunkte auf der Kreislinie nicht in M_3 enthalten sind. (Eine abgeschlossene Menge enthält alle ihre Randpunkte.) Die Menge ist zusammenhängend, sogar wegzusammenhängend, denn wenn wir zur Polarkoordinatendarstellung übergehen, besteht M_3 aus allen Punkten $re^{i\varphi}$ mit $r > 1$. Sind $re^{i\varphi}$ und $se^{i\psi}$ zwei solche Punkte, so liegen daher sowohl die Strecke von $re^{i\varphi}$ nach $se^{i\varphi}$ als auch der Kreisbogen von $se^{i\varphi}$ nach $se^{i\psi}$ in M_3, und beide zusammen bilden einen Weg vom einen Punkt zum anderen. Offensichtlich ist M_3 nicht beschränkt, also nicht kompakt. Als offene zusammenhängende Menge ist es ein Gebiet, aber nicht einfach zusammenhängend, da zum Beispiel das Integral über die in M_3 holomorphe Funktion $z \mapsto 1/z$ entlang der Kreislinie mit Radius zwei um Null nicht verschwindet.

M_4 ist die offene Einheitskreisscheibe, also offen und nicht abgeschlossen, da keiner der Randpunkte in M_4 liegt. Also ist sie auch nicht kompakt. Als konvexe Menge ist sie aber natürlich zusammenhängend und damit ein Gebiet. Wegen der Konvexität ist der CAUCHYsche Integralsatz bereits in seiner ersten Version anwendbar; damit ist M_4 einfach zusammenhängend.

M_5 ist die offene Einheitskreisscheibe ohne ihren Mittelpunkt. Als Urbild des offenen Intervalls $(0, 1)$ unter der stetigen Abbildung $z \mapsto |z|$ ist sie offen; sie ist aber nicht abgeschlossen, da sie keinen ihrer Randpunkte enthält. Wegen des fehlenden Mittelpunkts ist M_5 zwar nicht konvex, aber die Menge ist trotzdem wegzusammenhängend: Sie besteht aus allen Punkten $re^{i\varphi}$ mit $0 < r < 1$, und damit zeigt dasselbe Argument wie bei M_3 den Wegzusammenhang. Somit ist M_5 ein Gebiet, aber nicht einfach zusammenhängend, denn wieder ist $z \mapsto 1/z$ holomorph im Gebiet, aber das Intgegral längs der Kreislinie mit Radius $1/2$ um den Nullpunkt verschwindet nicht.

M_6 ist die abgeschlossene Einheitskreisscheibe, also abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt. Sie ist nicht offen, also auch kein Gebiet, denn keiner der Randpunkte hat eine offene Umgebung, die ganz in M_4 liegt. Als konvexe Menge ist sie insbesondere zusammenhängend.

b) Beantworten Sie die entsprechenden Fragen auch für $M = \widehat{\mathbb{C}}$!

Lösung: In $\widehat{\mathbb{C}}$ ist $\widehat{\mathbb{C}}$ selbst natürlich offen, denn jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ hat in $\mathbb{C}$ eine offene Umgebung, die damit auch offen in $\widehat{\mathbb{C}}$ ist, und für $z = \infty$ ist beispielsweise die Menge $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid |z| > 1\}$ eine offene Umgebung. Sie ist auch abgeschlossen, den ihr Komplement, die leere Menge, ist natürlich offen. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt. $\widehat{\mathbb{C}}$ ist auch zusammenhängend, denn wäre $\widehat{\mathbb{C}}$ die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen, so müßte eine davon den Punkt ∞ enthalten. Nimmt man diesen Punkt aus der Menge heraus, ist sie (nach Definition einer offenen Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$) eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, die nicht leer sein kann, da $\{\infty\}$ sonst offen in $\widehat{\mathbb{C}}$ wäre. Also wäre auch $\mathbb{C}$ nicht zusammenhängend, obwohl die Menge sogar konvex ist. Somit ist $\widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Jede auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ holomorphe Funktion ist konstant, und für eine konstante Funktion verschwindet das Integral längs einer geschlossenen Kurve wegen der Existenz der (linearen) Stammfunktion. (Strenggenommen müßte man sich noch Gedanken machen für den Fall, daß der Integrationsweg durch den Punkt ∞ geht, aber die Situation kann man immer wegtransformieren.)

Aufgabe 3: (*8 Punkte*)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen irgendwo holomorph sind, und geben Sie gegebenenfalls das größtmögliche Teilgebiet G von $\mathbb{C}$ an, auf dem dies der Fall ist! Untersuchen Sie auch, ob die jeweilige Funktion in den Punkten, in denen sie nicht holomorph ist, meromorph ist!

a) $f(z) = \dfrac{\sin z}{e^z - e^{-z}}$ *b)* $f(z) = e^{1/z^2}$ *c)* $f(z) = \dfrac{|\sin z|}{\cos z}$ *d)* $f(z) = \dfrac{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}{z^2 - 4}$

Begründen Sie ihre Aussagen!

Lösung:

a) Zähler und Nenner sind holomorph; Probleme gibt es also höchstens mit den Nullstellen des Nenners. Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, ist die Gleichung $e^z = e^{-z}$ äquivalent zu $e^{2z} = 1$, d.h. $2z$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ und z selbst eines von πi. Da

$$\sin k\pi i = \frac{e^{ik\pi i} - e^{-ik\pi i}}{2i} = \frac{e^{-k\pi} - e^{k\pi}}{2i}$$

nur für $k = 0$ verschwindet, gibt es Pole für alle Punkte $z = k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Für $k = 0$ verschwinden Zähler und Nenner; nach DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{e^z - e^{-z}} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{e^z + e^{-z}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{C},$$

an der Stelle $z = 0$ läßt sich die Funktion also stetig fortsetzen zu einer holomorphen Funktion. Sie ist somit holomorph auf $\mathbb{C}$ ohne den Punkten $z = k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, und an den Ausnahmepunkten hat sie einen Pol, ist also meromorph.

b) Auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Funktion holomorph als Hintereinanderausführung zweier holomorpher Funktionen. Für $z = 0$ ist $1/z^2 = \infty$, und dort hat die Exponentialfunktion eine wesentliche Singularität. Somit ist die Funktion holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und auch nicht meromorph auf ganz $\mathbb{C}$.

c) $\cos z$ ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$; wäre f holomorph auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, so wäre dort auch die Funktion $g(z) = f(z)\cos z = |\sin z|$ holomorph. Da sie nicht konstant ist, müßte sie G nach dem Satz von der Gebietstreue abbilden auf ein Gebiet, das aber natürlich in $\mathbb{R}$ liegen müßte. Da es ein solches Gebiet nicht gibt, ist f nirgends holomorph.

d) Als rationale Funktion ist f meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ (und sogar $\widehat{\mathbb{C}}$). Überall, wo der Nenner nicht verschwindet, ist sie offensichtlich holomorph; Probleme machen also höchstens die beiden Nennernullstellen ± 2. Für $z = 2$ hat der Zähler den Wert $8 - 24 + 22 - 6 = 0$, das Polynom ist also durch $z - 2$ teilbar, und die Funktion ist für $z \neq 2$ auch darstellbar als Zähler dividiert durch $z - 2$ geteilt durch $z + 2$ und damit holomorph fortsetzbar nach $z = 2$. Für $z = -2$ hat der Zähler den Wert $-8 - 24 - 11 - 6 < 0$; hier hat die Funktion also einen Pol.

Aufgabe 4: (*15 Punkte*)

D sei die Kreisscheibe mit Radius zwei um den Nullpunkt, und γ sei der Streckenzug vom Punkt $-2 + 2i$ zu den Punkten $-2 - 2i$, $2 + 2i$, $2 - 2i$ und zurück zu $-2 + 2i$.

a) Ist γ eine JORDAN-Kurve?

Lösung: γ ist keine JORDAN-Kurve, denn die Strecke von $-2-2i$ nach $2+2i$ und die von $2 - 2i$ nach $-2 + 2i$ schneiden sich im Nullpunkt, der somit zweimal durchlaufen wird.

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$I_1 = \int_\gamma \cos z \, dz, \qquad I_2 = \int_\gamma \mathfrak{Re}\, z \, dz, \qquad I_3 = \int_{\partial D} \frac{dz}{\sin z}, \qquad I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{\cos z}, \qquad I_5 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 1}$$

Lösung: Der Kosinus hat auf ganz $\mathbb{C}$ die Stammfunktion $-\sin z$, und γ ist eine geschlossene Kurve. Also verschwindet das Integral I_1.

Die Strecke von $-2 + 2i$ nach $-2 - 2i$ kann parametrisiert werden durch

$$\gamma_1 \colon \begin{cases} [-2, 2] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto -2 - t \end{cases}$$

Daher ist

$$\int_{\gamma_1} \Re z \, dz = \int_{-2}^{2} (-2) \cdot (-i) \, dt = (2i) \cdot \big(2 - (-2)\big) = 8i \,.$$

Der Weg von $-2-2i$ nach $2+2i$ kann parametrisiert werden durch

$$\gamma_2 \colon \begin{cases} [-2, 2] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto (1+i)t \end{cases}$$

Somit ist

$$\int_{\gamma_2} \Re z \, dz = \int_{-2}^{2} t \cdot (1+i) \, dt = (1+i) \int_{-2}^{2} t \, dt = 0 \,.$$

Die Strecke von $2+2i$ nach $2-2i$ kann parametrisiert werden durch

$$\gamma_3 \colon \begin{cases} [-2, 2] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto 2 - t \end{cases}$$

Daher ist

$$\int_{\gamma_1} \Re z \, dz = \int_{-2}^{2} 2 \cdot (-i) \, dt = (-2i) \cdot \big(2 - (-2)\big) = -8i \,.$$

Der Rückweg von $2-2i$ nach $-2+2i$ kann parametrisiert werden durch

$$\gamma_4 \colon \begin{cases} [-2, 2] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto (i-1)t \end{cases}$$

Somit ist

$$\int_{\gamma_4} \Re z \, dz = \int_{-2}^{2} t \cdot (i-1) \, dt = (i-1) \int_{-2}^{2} t \, dt = 0 \,.$$

I_2 als Summe der vier Integrale verschwindet somit.

Der Integrand von I_3 hat in D nur den einen Pol in $z = 0$; ansonsten ist er holomorph auch in einer Umgebung des Integrationswegs, zum Beispiel in der offenen Kreisscheibe mit Radius $3/2$ um Null. Nach dem Residuensatz ist das Integral daher gleich $2\pi i$ mal dem Residuum des Integranden im Nullpunkt.

Da der Sinus bei Null eine einfache Nullstelle hat, ist dort auch die Polordnung des Integranden gleich eins, d.h.

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$$

z.B. nach DE L'HÔPITAL. Somit ist $I_3 = 2\pi i$.

Der Kosinus, der Nenner des Integranden von I_4, hat nur reelle Nullstellen; sie liegen bei den halbganzzahligen Vielfachen von π. Die kleinste positive liegt also bei $\pi/2 \approx 1{,}7\ldots$, und damit geht der Integrationsweg um $\pm\pi/2$ herum, während die restlichen Nullstellen keine Rolle spielen.

Die Integration über γ ist äquivalent zur Integration über einen Zyklus bestehend aus den Rändern zweier Dreiecke $\triangle_1$ mit Ecken 0 und $-2 \pm 2i$ sowie $\triangle_2$ mit Ecken 0 und $2 \pm 2i$. $\triangle_1$ wird dabei, wie gewohnt, im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, $\triangle_2$ aber im Uhrzeigersinn. Jedes der Dreiecke enthält in seinem Innern genau einen Pol. Die Umlaufzahl von $\partial\triangle_1$ um $-\pi/2$ ist eins, die von $-\partial\triangle_2$ um $\pi/2$ entsprechend -1. Nach dem Residuensatz für Zykeln ist daher I_4 gleich $2\pi i$ mal der Differenz der Residuen an der Stelle $-\pi/2$ und an der Stelle $\pi/2$. Die Polordnungen sind jeweils eins, so daß die Residuen leicht als Grenzwerte berechnet werden können: Nach der Regel von DE L'HÔPITAL ist

$$\operatorname{Res}_{z=\pm\pi/2} \frac{1}{\cos z} = \lim_{z \to \pm\pi/2} \frac{z \mp \pi/2}{\cos z} = \lim_{z \to \pm\pi/2} \frac{1}{-\sin z} = \mp 1 \,.$$

Damit ist $I_4 = 2\pi i \cdot \big(1 - (-1)\big) = 4\pi i$.

Der Integrand von I_5 hat seine Polstellen an den Stellen $\pm i$, die in keinem der beiden Dreiecke liegen. iEs gibt daher ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das beide Dreiecke enthält, und in dem der Integrand hoomorph ist. Das Integral verschwindet daher nach dem CAUCHYschen Integralsatz.

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 5x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 99x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

alle drei den gleichen Wert haben, und berechnen Sie diesen!

Lösung: In allen drei Fällen hat der Zähler des Integranden Grad zwei, ist also um mindestens zwei kleiner als der des Nenners, dessen Nullstellen $\pm i$ und $\pm 2i$ allesamt nichtreell sind. Somit können sie mit dem Ansatz über den Residuensatz berechnet werden, woraus insbesondere folgt, daß sie existieren. Aus dem gleichen Grund existieren auch die Integrale

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \quad \text{und} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)},$$

und die drei Integrale sind daher wegen der Linearität der Integration $I_1 - 5I_2$, $I_1 + 3I_2$ und $I_1 + 99I_2$. Um zu zeigen, daß sie gleich sind, muß daher nachgewiesen werden, daß I_2 verschwindet. Das ist aber klar, da das Integral existiert und der Integrand ungerade ist.

Der Wert aller drei Integrale ist somit gleich dem von I_1, und der wiederum ist $2\pi i$ mal der Summe der Residuen bei i und bei $2i$. Da alle Pole einfach sind, lassen sich diese als Limites berechnen:

$$\operatorname{Res}_i \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i} \frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{-1}{2i\cdot(-1+4)} = \frac{-1}{6i}$$

und

$$\operatorname{Res}_{2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{-4}{(-4+1)\cdot 4i}$$
$$= \frac{-4}{-12i} = \frac{1}{3i}$$

Somit ist $I_1 = 2\pi i(\frac{1}{3i} - \frac{1}{6i}) = \frac{1}{3}\pi$ der gemeinsame Wert der drei Integrale.

Aufgabe 6: *(3 Punkte)*

a) Was ist der Hauptwert des Logarithmus von i?

Lösung: In Polarkoordinatendarstellung ist $i = 1 \cdot e^{\pi i/2}$; der Hauptwert des Logarithmus von i ist daher $\pi i/2$.

b) Welche Werte kann $\log i$ annehmen, wenn Sie einen anderen Zweig des Logarithmus verwenden?

Lösung: Die anderen Werte unterscheiden sich vom Hauptwert um ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$, sind also $\pi i/2 + 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

c) Die Funktion $z \mapsto i^z$ sei über irgendeinen Zweig des Logarithmus definiert. Welche Werte kann i^i annehmen?

Lösung: $i^z = e^{z \log i}$ für irgendeinen Zweig des Logarithmus; die möglichen Werte von i^i sind daher $e^{i\cdot(\pi i/2 + 2k\pi i)} = e^{-\pi/2 - 2k\pi}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Der Hauptwert ist $e^{-\pi/2} \approx 0{,}207879576$.

Aufgabe 7: *(7 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle meromorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $f(1/n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

Lösung: Eine holomorphe Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(1/n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ muß identisch verschwinden, denn die Menge der Zahlen $1/n$ hat einen Häufungspunkt, und zwei holomorphe Funktionen, die auf einer Menge mit Häufungspunkt übereinstimmen, stimmen auf ihrem gesamten Definitionsbereich überein, so daß g gleich der Nullfunktion sein muß.

Nun sei $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion mit $f(1/n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der Pole von f hat nach Definition einer meromorphen Funktion keinen Häufungspunkt; daher gibt es nach dem WEIERSTRASSschen Produktsatz eine holomorphe Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die in jedem Punkt z, in dem f einen n-fachen Pol hat, von der Ordnung n verschwindet und ansonsten keine Nullstellen hat. Die Funktion $g = hf$ ist somit holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, und natürlich ist auch $g(1/n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit verschwindet g identisch. In allen Punkten $z \in \mathbb{C}$, in denen f keinen Pol hat, ist $h(z) \neq 0$, so daß dort auch $f(z)$ verschwinden muß. Da f als meromorphe Funktion stetig sein muß, folgt, daß f auf ganz $\mathbb{C}$ verschwindet.

b) Finden Sie meromorphe Funktionen $f, g\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit der Eigenschaft

$$f(2n) = \prod_{k=1}^{n}(2k) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad g(2n+1) = \prod_{k=0}^{n}(2k+1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\,!$$

Lösung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$f(2n) = \prod_{k=1}^{n}(2k) = \prod_{k=1}^{n} 2 \cdot \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n! = e^{n\cdot\log 2}\Gamma(n+1)\,.$$

Somit ist

$$f(z) = e^{z/2\cdot\log 2}\Gamma(z/2+1)$$

eine Funktion mit der gewünschten Eigenschaft.

$$g(2n+1) = \prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{\ell=1}^{2n+1}\ell}{\prod_{m=1}^{n}(2m)} = \frac{(2n+1)!}{f(2n)} = \frac{\Gamma(2n+2)}{f(2n)}$$

für $n \in \mathbb{N}$, und auch für $n = 0$ gilt diese Gleichung, denn für die oben definierte Funktion ist $f(0) = 1$. Somit können wir

$$g(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{f(z-1)}$$

setzen.

c) Sind f und g durch die Bedingungen in *b)* eindeutig bestimmt?

Lösung: Natürlich nicht; wir können beispielsweise in beiden Fällen eine Funktion addieren, die auf $\mathbb{N}_0$ verschwindet (wie $\sin \pi z$) oder mit einer nirgends verschwindenden Funktion multiplizieren. Eine solche Funktion bekommen wir, wenn wir eine beliebige holomorphe Funktion mit der Exponentialfunktion schachteln.

d) Ist $\Gamma(z)$ beschränkt im Streifen $0 \leq \mathfrak{Re}\, z \leq 1$?

Lösung: Natürlich nicht, denn die Γ-Funktion hat einen Pol bei $z = 0$.

e) Ist $\Gamma(z)$ beschränkt im Streifen $5 \leq \mathfrak{Re}\, z \leq 7$?

Lösung: Das folgt genauso wie die Beschränktheit im Streifen $1 \leq \mathfrak{Re}\, z \leq 2$ über die GAUSSsche Definition: Sei $z = x + iy$ mit $5 \leq x \leq 7$. Dann ist $|z| \geq x$, also

$$\left|\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right| \leq \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

und damit $\left|\Gamma(z)\right| \leq \Gamma(x)$. Da die Γ-Funktion für $\mathfrak{Re}\, z > 0$ holomorph ist, ist sie sicherlich im kompakten Intervall $[5,7]$ beschränkt, also auch im gesamten Streifen.