

24. Mai 2019

12. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß das Produkt $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ eigentlich konvergiert, und berechnen Sie seinen Wert!

Aufgabe 2: (10 Punkte)

- Berechnen Sie $\Gamma(n/2)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \leq 10$, also für alle ganz- und halbzahligen Werte zwischen -5 und 5 !
- Leiten Sie aus der Produktdarstellung von $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ eine Formel für $\Gamma(z)\Gamma(-z)$ ab!
- Zeigen Sie, daß $\Gamma(z)$ nie Null wird!
- Zeigen Sie, daß die Γ -Funktion für alle $z \in \mathbb{R}$ entweder einen Pol hat oder einen reellen Wert annimmt!
- Bestimmen Sie das Vorzeichen von $\Gamma(z)$ im Intervall $(n, n+1)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

- Zeigen Sie, daß die Funktion $f(z) = 2^{z-1} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$ meromorph auf \mathbb{C} und im Streifen $1 \leq \Re z \leq 2$ beschränkt ist!
- Beweisen Sie, daß f der Funktionalgleichung $f(z+1) = zf(z)$ genügt!
- Folgern Sie, daß $\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}} \Gamma(z)$ ist!
- Leiten Sie daraus eine explizite Formel für $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ ab!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 29. Mai 2019, um 11.59 Uhr