

16. Mai 2019

11. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: (6 Punkte)

- a) Zeigen Sie die eigentliche Konvergenz von $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j(j+2)}\right)$, und berechnen Sie den Grenzwert!
- b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist das Produkt $\prod_{j=1}^{\infty} (1 - z^j)$ eigentlich konvergent?

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Konstruieren Sie eine stetige Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die für jede natürliche Zahl k eine k -fache Nullstelle hat und sonst nirgends verschwindet!

Aufgabe 3: (6 Punkte)

- a) Berechnen Sie $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2$ durch Vergleich von TAYLOREntwicklung und Produktdarstellung der Funktion $\sin \pi z$!
- b) Zeigen Sie: $-i \sin(\pi z) \sin(i\pi z) = \pi^2 z^2 \prod_{j=1}^{\infty} (1 - z^4/j^4)$.
- c) Was ist $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^4$?

Aufgabe 4: (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie über die Produktentwicklungen die Quotienten

$$\frac{\sin(\pi/4)}{\sin(\pi/2)} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(\pi/6)}{\sin(\pi/3)},$$

und leiten Sie daraus Produktentwicklungen für $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ ab! Beachten Sie dabei, daß jeweils eines der beiden Produkte Teilprodukt des anderen ist, und kürzen Sie entsprechend!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 22. Mai 2019, um 11.59 Uhr