

11. April 2019

9. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: (7 Punkte)

$f: G \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ sei meromorph im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, und $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ sei ein Integrationsweg, der durch keine Nullstelle und keinen Pol von f gehe. Außerdem sei γ , als Kette aufgefaßt, ein nullhomologer Zyklus.

a) Zeigen Sie, daß es stetige Funktionen $r, \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß $f(\gamma(t)) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ für alle $t \in [a, b]$.

b) $\varphi(b) - \varphi(a) = 2\pi \sum_{z \in G} n(\gamma, z) \operatorname{ord}_z f$. (*Hinweis:* Betrachten Sie den Integrationsweg

$f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und führen Sie $n(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z}$ nach der Substitutionsregel auf

ein Integral über γ zurück. Rechnen Sie dieses weiter aus, indem Sie a) anwenden.)

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Welche der folgenden offenen Mengen sind einfach zusammenhängend, welche nicht? Begründen Sie ihre Aussagen.

a) $\mathbb{C} \setminus \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\}$

b) $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < \Re z < 3\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z| < 4\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 5\}$

f) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 6| < 6 \vee |z + 6| < 6\}$

g) $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \neq 0 \wedge |\Im z| < 7\} \cup \{ir \in i\mathbb{R} \mid 6 < |r| < 7\}$

h) $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \neq 0 \wedge |\Im z| < 8\} \cup \{ir \in i\mathbb{R} \mid |r| < 7\}$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

a) Jedes konvexe Gebiet ist einfach zusammenhängend.

b) Ein Gebiet G heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt, so daß für jeden Punkt $z \in G$ die Verbindungsstrecke von z_0 nach z ganz in G liegt. Zeigen Sie, daß jedes solche Gebiet einfach zusammenhängend ist!

c) $G \subset \mathbb{C}$ sei einfach zusammenhängend, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig und habe eine stetige Umkehrfunktion $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist auch $H = \varphi(G)$ einfach zusammenhängend.

d) Ist auch jedes holomorphe Bild eines einfach zusammenhängenden Gebiets wieder einfach zusammenhängend? (*Hinweis:* Betrachten Sie beispielsweise die Exponentialfunktion.)

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 8. Mai 2019, um 11.59 Uhr