

28. Februar 2019

### 3. Übungsblatt Funktionentheorie I

**Aufgabe 1:** (10 Punkte)

$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 5\}$  sei die Kreisscheibe mit Radius fünf um den Nullpunkt. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a)  $\int_{\partial D} z^n dz$  für eine beliebige ganze Zahlen  $n$ ,    b)  $\int_{\partial D} e^{z^2 \cos z} dz$ ,    c)  $\int_{\partial D} \frac{e^z}{z-2} dz$ ,  
d)  $\int_{\partial D} \frac{z^3}{z^2 - 10z} dz$ ,    e)  $\int_{\partial D} \frac{\sin z}{z} dz$

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^n |x|$  ist  $n$ -mal differenzierbar, aber nicht  $n+1$  mal.  
b) Ist die Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = z^n |z|$  stetig? Ist sie komplex differenzierbar?  
c) Zeigen Sie: Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = e^{-1/x^2}$  für  $x \neq 0$  und  $f(0) = 0$  ist beliebig oft differenzierbar. Wohin konvergiert ihre TAYLOR-Reihe um den Punkt Null?  
d) Ist die Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = e^{-1/z^2}$  für  $z \neq 0$  und  $f(0) = 0$  stetig? Ist sie komplex differenzierbar?

**Aufgabe 3:** (5 Punkte)

- a) Zerlegen Sie das Polynom  $X^4 - 1$  in ein Produkt linearer und quadratischer reeller Polynome!  
b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen  $z$  mit  $z^6 = 1$ !  
c) Zerlegen Sie das Polynom  $X^6 - 1$  in ein Produkt linearer und quadratischer reeller Polynome!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 6. März 2019, um 11.59 Uhr