

21. April 2017

Modulklausur Elemente der Funktionentheorie

- Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! •••
••• Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge •••
••• bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst •••
••• auf das, womit sie schnell Punkte holen können! •••

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

a) $(i+3)(i-3)$ b) $\frac{3+4i}{1-2i}$ c) $(i-1)^2$ d) $\frac{(i-1)^{100}}{2^{50}}$ e) \sqrt{i}

Aufgabe 2: (8 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Jede komplexe Zahl z vom Betrag eins läßt sich darstellen in der Form $z = w/\overline{w}$ mit $w \in \mathbb{C}$.
b) Wie viele mögliche Zahlen w gibt es, wenn noch zusätzlich verlangt wird, daß auch w den Betrag eins haben soll?
c) Zeigen Sie, daß dann $w/\overline{w} = w^2$ ist!

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen irgendwo holomorph sind, und geben Sie gegebenenfalls das größtmögliche Teilgebiet G von \mathbb{C} an, auf dem dies der Fall ist! Untersuchen Sie auch, ob die jeweilige Funktion in den Punkten, in denen sie nicht holomorph ist, meromorph ist!

a) $f(z) = e^{\sin(e^z+z^2)}$ b) $f(z) = |z|^2 - 2(\Im z)^2 + 2i(\Re z)(\Im z)$ c) $f(z) = z^2 + (\overline{z})^2$

d) $f(z) = \frac{21z}{(z^2+4)(z^2+2017)}$

Begründen Sie ihre Aussagen!

Aufgabe 4: (8 Punkte)

D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt, und Δ sei das Dreieck mit den dritten Einheitswurzeln 1 , $\zeta_3 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ und $\overline{\zeta_3} = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$ als Ecken. Weiter sei f eine im Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{4} < |z| < 5\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\partial \Delta} f(z) dz.$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie die drei Dreiecksseiten jeweils einzeln, zusammen mit den darüberliegenden Drittelkreisen.)

•••

Bitte wenden!

•••

Aufgabe 5: (15 Punkte)

D sei die Kreisscheibe mit Radius zwei um den Nullpunkt. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$a) \int_{\partial D} |z|^2 dz \quad b) \int_{\partial D} \frac{dz}{z-1} \quad c) \int_{\partial D} \frac{5z}{z-3} dz \quad d) \int_{\partial D} \frac{2z}{z^2 - 2z + 2} dz \quad e) \int_{\partial D} \frac{\cos z}{z^3} dz$$

Aufgabe 6: (7 Punkte)

Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{20x}{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 5)} dx$!