

21. April 2017

7. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: (8 Punkte)

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ seien die Integrationswege mit

$$\gamma_1(t) = 1+t(i-1), \quad \gamma_2(t) = -1+t(i+1), \quad \gamma_3(t) = 1-t(i+1) \quad \text{und} \quad \gamma_4(t) = -1-t(i-1).$$

- Zeigen Sie, daß $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4$ ein Zyklus ist!
- Berechnen Sie die Windungszahl dieses Zyklus um den Nullpunkt!
- Ist Γ nullhomolog auf \mathbb{C} ?
- Ist Γ nullhomolog auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{2}\}$?
- Was ist $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$?

Aufgabe 2: (12 Punkte)

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ seien die Integrationswege mit

$$\gamma_1(t) = t, \quad \gamma_2(t) = -t, \quad \gamma_3(t) = e^{\pi i t} \quad \text{und} \quad \gamma_4(t) = e^{-\pi i t}.$$

- Welche Bedingungen müssen die ganzen Zahlen n_1, n_2, n_3 und n_4 erfüllen, damit die Kette $\Gamma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + n_3\gamma_3 + n_4\gamma_4$ ein Zyklus ist?
- Bestimmen Sie alle Zykeln dieser Form, bei denen $|n_i| \leq 1$ für alle i gilt!
- Geben Sie für jeden dieser Zykeln Γ einen Integrationsweg γ an derart, daß

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

für alle meromorphen Funktionen, die keinen Pol auf $|\Gamma|$ haben! Bei zwei Zykeln Γ und $-\Gamma$, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, genügt es, γ für einen der beiden anzugeben.

- Welche dieser Zykeln sind nullhomolog auf \mathbb{C} ?
- Welche dieser Zykeln sind nullhomolog auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}i\}$?
- Zeigen Sie, daß keine zwei dieser Zykeln homolog sind auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i\}$!
- Berechnen Sie die Windungszahlen dieser Zykeln um den Punkt $\frac{1}{2}i$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 28. April 2017, um 12.00 Uhr