Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C201

Themenvorschläge zu den Übungen am 13. Juni 2001

Sinn der Übungen ist es, daß SIE Fragen stellen und Themen vorschlagen. Die untenstehende Liste ist nur als Notbehelf gedacht für den Fall, daß Ihnen nichts besseres einfällt. Selbstverständlich können Sie auch Themen aus der vorigen Liste betrachten, falls diese Sie mehr interessieren.

a) Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall $[a, b]$. Berechnen Sie den Erwartungswert von $\sin X$!

b) Die Zufallsvariable X sei (standard-)normalverteilt auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie den Erwartungswert von $f(X)$ mit $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = e^{x^2/2-x}$ sonst!

c) Berechnen Sie die charakteristische Funktion $\mathbb{E}(e^{iX})$ einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen X!

d) X_i seien Zufallsvariablen, die verschiedene Würfe einer Münze beschreiben; X_i habe den Wert eins, falls beim i-ten Wurf das Ereignis „Kopf“ eintritt und null sonst. Welche zweidimensionale Verteilung hat $X_1 \otimes X_2$?

e) Welche hundertdimensionale Verteilung hat $\bigotimes_{i=1}^{100} X_i$?

f) Was könnte man sich in diesem Fall unter dem Definitionsbereich Ω der X_i (ungefähr) vorstellen?

g) Die Zufallsvariable Z sei gleichverteilt auf $[0, \frac{\pi}{2}]$. Bestimmen Sie die Erwartungswerte von $X = \sin Z$, $Y = \cos Z$ und Z!

h) Ist $\mathbb{E}(\sin Z) = \sin \mathbb{E}(Z)$ und $\mathbb{E}(\cos Z) = \cos \mathbb{E}(Z)$?

i) Bestimmen Sie die Varianzen von X und Y!

j) Berechnen Sie Kovarianz und Korrelation von X und Y!

k) Interpretieren Sie den numerischen Wert der Korrelation anschaulich!

l) Für die Zufallsvariablen $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sei $P_{X\otimes Y}$ gegeben durch die Dichte

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} .$$

Wie können Sie φ geometrisch interpretieren?

m) Welche marginalen Dichten haben X und Y?

n) Welchen Erwartungswert hat $\sin(X^2 + Y^2)$?

o) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $X \geq Y$?

Nützliche Stammfunktionen

$$\int \sin^2 x \, dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C \quad \text{und} \quad \int \cos^2 x \, dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

$$\int r \sin r^2 \, e^{-\frac{r^2}{2}} \, dr = -e^{-\frac{r^2}{2}} \left(\frac{2}{5} \cos r^2 + \frac{1}{5} \sin r^2 \right) + C$$