Umgang mit normalverteilten Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *normalverteilt* mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ, wenn die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X(\omega) \in [a, b]$ durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx$$

gegeben ist.
In Tabellenwerken findet man die Funktion

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\, dx$$

für $z \geq 0$. Damit läßt sich obiges Integral im Fall der sogenannten Standardnormalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ ausrechnen:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx = F(b) - F(a)\,.$$

Negative Werte von a und/oder b stören dabei nicht, denn wie wir in der Vorlesung gesehen haben, ist

$$F(-z) = 1 - F(z)\,.$$

(Eine Veranschaulichung dieser Formel ist auch im Maple *worksheet* zur Binomialverteilung und ihren Grenzfällen zu finden.)
Für eine Zufallsvariable X, die normalverteilt ist mit beliebigen Parametern μ und σ, betrachtet man die sogenannte *normalisierte* Variable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}\,.$$

Wie die Substitution

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \text{oder} \quad x = \sigma z + \mu$$

zeigt, ist mit

$$\alpha = \frac{a - \mu}{\sigma} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{b - \mu}{\sigma}$$

nach der Substitutionsregel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_\alpha^\beta e^{-z^2/2}\, \sigma\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-z^2/2}\, dz = F(\beta) - F(\alpha)\,,$$

durch Übergang zu den Normalisierungen der Grenzen läßt sich also auch das bei Kenntnis der Funktion F berechnen.

Beispiel: Die mittleren Oktobertemperaturen in München hatten zwischen 1911 und 1960 einen Mittelwert von $7{,}974°\mathrm{C}$ mit Standardabweichung $\sigma = 1{,}416°\mathrm{C}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die mittlere Oktobertemperatur eines Jahres zwischen sieben und acht Grad liegt?
Unter der Annahme einer Normalverteilung gehen wir über zu den normalisierten Grenzen

$$\frac{7°\mathrm{C} - 7{,}974°\mathrm{C}}{1{,}416°\mathrm{C}} \approx -0{,}688 \quad \text{und} \quad \frac{8°\mathrm{C} - 7{,}974°\mathrm{C}}{1{,}416°\mathrm{C}} \approx 0{,}0184$$

und erhalten die Wahrscheinlichkeit als Differenz $F(0{,}0184) - F(-0{,}688)$. Den erste Funktionswert können wir durch den Wert für $F(0{,}02)$ aus der Tabelle approximieren, den zweiten berechnen wir als

$$F(-0{,}688) = 1 - F(0{,}688) \approx 1 - F(0{,}69) \approx 1 - 0{,}754903 = 0{,}245097\,.$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$F(F(0{,}0184) - F(-0{,}688) \approx 0{,}507978 - 0{,}245097 = 0{,}262881\,.$$