WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515 A5, ZIMMER C 201

4. Juli 2001

11. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Zufallsvariable X sei als meßbare Funktion der Zufallsvariablen Y darstellbar. Dann ist $\mathbb{E}(X|Y) = X$.

Lösung: *Richtig,* denn nach Voraussetzung ist X eine meßbare Funktion von Y, wodurch **BE1** erfüllt ist, und **BE2** ist für die Zufallsvariable X natürlich trivialerweise richtig.

2) Richtig oder falsch: X_i sei das Vermögen eines Spielers beim Roulette nach dem i-ten Spiel. Dann ist der Prozeß $(X_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ein MARKOV-Prozeß.

Lösung: *Richtig,* denn was nach dem i-ten Spiel für die späteren Spiele zu erwarten ist, hängt nicht davon ab, wie das dann vorhandene Vermögen zustande gekommen ist, sondern von dessen Größe.

3) Richtig oder falsch: ... ein Martingal.

Lösung: *Falsch;* da nur 36/37 der Einsätze ausbezahlt werden, ist $\mathbb{E}\bigl(X_j \bigm| \{X_k | k \le i\}\bigr)$ für $j > i$ kleiner als X_i.

4) Richtig oder falsch: Sie würfeln immer wieder und notieren ihre Gesamtaugenzahl nach dem i-ten Wurf als X_i. Dann ist der Prozeß $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein MARKOV-Prozeß.

Lösung: *Richtig,* denn $\mathbb{E}\bigl(X_j \bigm| \{X_k | k \le i\}\bigr) = X_i + 3{,}5(j - i)$ hängt nur von X_i ab, nicht von den X_k mit $k < i$.

5) Richtig oder falsch: Dasselbe für $X_i =$ jeweilige Augenzahl

Lösung: *Erst recht richtig,* denn hier ist $\mathbb{E}\bigl(X_j \bigm| \{X_k | k \le i\}\bigr) = \mathbb{E}(X_j) = 3{,}5$ sogar unabhängig von allen X_k mit $k < j$.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Bei *Mensch ärgere Dich nicht* darf ein Spieler nach jeder Sechs noch einmal würfeln. Was ist der Erwartungswert seiner Gesamtaugenzahl?

Lösung: Die Zufallsvariable G stehe für die Gesamtaugenzahl und X für die Augenzahl beim ersten Wurf. Dann ist

$$\mathbb{E}(G) = P(X < 6)\cdot\mathbb{E}(G|X < 6) + P(X = 6)\cdot\bigl(\mathbb{E}(G|X = 6)\bigr) = \frac{5}{6}\cdot 3 + 1 + \frac{1}{6}\cdot\mathbb{E}(G)\,,$$

das heißt

$$\frac{5}{6}\cdot\mathbb{E}(G)=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}\quad\text{und}\quad\mathbb{E}(G)=\frac{21}{5}=4{,}2\,.$$

b) Bei einer Vorlesung darf jeder Student, der bei der Klausur weniger als zwanzig Punkte erreicht hat, an einer Nachklausur teilnehmen. Als effektive Punktzahl gilt in diesem Fall die Punktezahl der Nachklausur, ansonsten die der Klausur. Für einen bestimmten Studenten sei die Punktezahl in der Klausur gleichverteilt auf $\{17,18,19,20,21,22,23\}$; falls er an der Nachklausur teilnimmt sei sein Ergebnis dort gleichverteilt auf $\{19,20,21,22,23,24,25\}$. Was ist der Erwartungswert für seine effektive Punktezahl?

Lösung: X sei die Punktezahl bei der Klausur, Y die bei der Nachklausur und Z die effektive Punktzahl. Dann ist

$$\mathbb{E}(Z)=P(X\geq 20)\cdot\mathbb{E}(X|X\geq 20)+P(X<20)\cdot\mathbb{E}(Y|X<20)\,.$$

Da zu hoffen ist, daß der Student zwischen Klausur und Nachklausur etwas lernt, können wir hoffen, daß das Nachklausurergebnis unabhängig vom Ergebnis der nicht bestandenen Klausur ist und somit

$$\mathbb{E}(Y|X<20)=\mathbb{E}(Y)=22$$

setzen; zusammen mit

$$\mathbb{E}(X|X\geq 20)=\frac{\frac{20+21+22+23}{7}}{P(X\geq 20)}=\frac{\frac{20+21+22+23}{7}}{\frac{4}{7}}=\frac{20+21+22+23}{4}=21\frac{1}{2}$$

kommen wir damit auf

$$\mathbb{E}(Z)=\frac{4}{7}\cdot 21\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\cdot 22=22-\frac{2}{7}=21\frac{5}{7}\,.$$

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Zwischen zwei Zufallsvariablen X,Y wird ein Zusammenhang der Form $Y=X^2+aX+b$ vermutet. Drücken Sie die bestmöglichen Schätzwerte für a und b durch Erwartungswerte und Kovarianzen aus!

Lösung: Nach der Methode der kleinsten Quadrate werden a und b so gewählt, daß

$$\mathbb{E}\big((Y-X^2-aX-b)^2\big)=\mathbb{E}\big(Y^2+X^4+a^2X^2+b^2-2X^2Y-2aXY-2bY+2aX^3+2bX^2+2abX\big)$$
$$=\mathbb{E}(Y^2)+\mathbb{E}(X^4)+a^2\mathbb{E}(X^2)+b^2-2\mathbb{E}(X^2Y)-2a\mathbb{E}(XY)-2b\mathbb{E}(Y)+2a\mathbb{E}(X^3)+2b\mathbb{E}(X^2)+2ab\mathbb{E}(X)$$

minimal wird. Die partielle Ableitung dieses Ausdrucks nach a ist

$$2a\mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(XY)+2\mathbb{E}(X^3)+2b\mathbb{E}(X)=2a\mathbb{E}(X^2)+2b\mathbb{E}(X)-2\mathbb{E}(XY)+2\mathbb{E}(X^3)\,,$$

die nach b

$$2b-2\mathbb{E}(Y)+2\mathbb{E}(X^2)+2a\mathbb{E}(X)=2a\mathbb{E}(X)+2b-2\mathbb{E}(Y)+2\mathbb{E}(X^2)\,.$$

Die gesuchten Werte für a,b erfüllen also das lineare Gleichungssystem

$$a\mathbb{E}(X^2)+b\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X^3)\quad\text{und}\quad a\mathbb{E}(X)+b=\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(X^2)\,.$$

Multiplikation der zweiten Gleichung mit $\mathbb{E}(X)$ und Subtraktion von der ersten Gleichung führt auf

$$a\big(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\big) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2)$$

oder

$$a \cdot V(X) = \mathrm{Cov}(X,Y) - \mathrm{Cov}(X,X^2)\,.$$

Falls die Varianz von X verschwindet, ist dies je nach rechter Seite unlösbar oder nutzlos, ansonsten folgt

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y) - \mathrm{Cov}(X,X^2)}{V(X)} \quad \text{und} \quad b = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X^2) - a\mathbb{E}(X)\,.$$

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Eine Boeing 727 kann erst abheben, wenn sie eine Geschwindigkeit vom mindestens 200 Meilen pro Stunde oder etwa 90 m/s erreicht hat. Während eines Starts mit ungefähr konstanter Beschleunigung gibt der Flugschreiber folgende Geschwindigkeiten an:

Zeit:	10:42:30	10:42:32	10:42:34	10:42:36	10:42:38
Geschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$:	16,53	21,70	38,21	40,06	43,98
Zeit:	10:42:40	10:42:40	10:42:44	10:42:46	10:42:48
Geschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$:	45,61	52,96	57,70	66,45	71,47

Bestimmen Sie Schätzwerte für

a) die Beschleunigung, mit der die Maschine startet *b)* den Startzeitpunkt

c) den Weg, den das Flugzeug bis dahin auf der Startbahn zurückgelegt hat!

Lösung: Bei konstanter Beschleunigung b ist die Geschwindigkeit $v(t)$ zur Zeit t gleich

$$v(t) = bt + v_0 \quad \text{mit} \quad v_0 = v(0)\,.$$

Wir setzen $t =$ Zeit in Sekunden nach 10:42 und schätzen b und v_0 durch lineare Regression. Die Formel aus der Vorlesung führt auf

$$b \approx 2{,}865\,\tfrac{m}{s^2} \quad \text{und} \quad v_0 \approx -66{,}27\,\tfrac{m}{s}\,.$$

Die Maschine startet mit Geschwindigkeit null, also zum Zeitpunkt

$$t \approx \frac{66{,}27}{2{,}865}\,s \approx 23{,}12\,s\,,$$

also um 10:42:23,12. Sie hebt ab, sobald eine Geschwindigkeit von $90\frac{m}{s}$ erreicht ist, also für

$$t \approx \frac{90 + 66{,}27}{2{,}865}\,s \approx 54{,}54\,s\,,$$

also um 10:42:54,54. Die Beschleunigungsphase dauerte also

$$54{,}54\,s - 23{,}12\,s = 31{,}42\,s\,,$$

und der Weg, der bei konstanter Beschleunigung b aus dem Stand während einer Zeitspanne der Länge τ zurückgelegt wird, ist

$$\frac{b\tau^2}{2} \approx 1414\,m\,.$$

d) Wie gut passen die Daten zur Annahme einer konstanten Beschleunigung?

Lösung: Darüber gibt beispielsweise der Korrelationskoeffizient Auskunft; er errechnet sich zu

$$\rho \approx 0{,}9821\ ,$$

was für eine recht gute Übereinstimmung spricht. Auch die Zeichnung bestätigt dies.