WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

27. Juni 2001

10. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ist X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert x, so ist X^2 eine Zufallsvariable mit Erwartungswert x^2.

Lösung: *Falsch:* Ist X etwa standard-normalverteilt, so ist $\mathbb{E}(X) = 0$, aber $\mathbb{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) = 1 \neq 0^2$.

2) Richtig oder falsch: Schreiben tausend Studenten eine Klausur, sind die dort erreichten Punktezahlen annähernd normalverteilt.

Lösung: *Im allgemeinen falsch:* Bei einer Klausur, die sehr gut oder sehr schlecht ausfällt, wird man eine deutliche Schiefe der Verteilung erwarten.

3) Richtig oder falsch: Der jährliche Abitursdurchschnitt im Fach Mathematik in Baden-Württemberg ist, als Funktion des Jahres, ungefähr normalverteilt.

Lösung: *Richtig* nach dem zentralen Grenzwertsatz: Der Abitursdurchschnitt eines Jahres ist Mittelwert unabhängiger Zufallsvariablen, nämlich der Noten der einzelnen Schüler.

4) Richtig oder falsch: X und Y seien voneinander unabhängige diskrete Zufallsvariablen. Dann ist $p(x|y) = p_X(x)$ für alle y mit $p_Y(y) \neq 0$.

Lösung: *Richtig,* denn dann ist $P(X = x \wedge Y = y) = p_X(x)p_Y(y)$, und $p(x|y)$ entsteht daraus durch Division durch $p_Y(y)$.

5) Richtig oder falsch: X und Y seien voneinander unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist $\mathbb{E}(X + Y|Y) = \mathbb{E}(X) + Y$.

Lösung: *Richtig:* Wegen der Linearitätseigenschaft ist $\mathbb{E}(X + Y|Y) = \mathbb{E}(X|Y) + \mathbb{E}(Y|Y)$. Wegen der Unabhängigkeit von X und Y ist $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$, und natürlich ist $\mathbb{E}(Y|Y) = Y$.

Aufgabe 1: **(***5 Punkte***)**
Durch Digitalisierung von thermischen Rauschen werde eine Folge einer Million Bit erzeugt, deren jedes, unabhängig von den anderen, mit gleicher Wahrscheinlichkeit null oder eins ist. (So etwas ist z.B. gelegentlich in der Kryptographie nützlich.)

a) Wie ist die Anzahl der Nullen unter den erzeugten Bits verteilt?

Lösung: Da die einzelnen Bits durch unabhängige BERNOULLI-Prozesse erzeugt werden, ist die Anzahl der Nullen binomialverteilt mit Parametern $n = 10^6$ und $p = 0{,}5$.

b) Durch welche Normalverteilung läßt sich dies nach dem zentralen Grenzwertsatz approximieren?

Lösung: Durch die Normalverteilung, die denselben Erwartungswert und dieselbe Varianz hat wie die Binomialverteilung aus *a)*. Da jede der 10^6 BERNOULLI-Variablen Erwartungswert $\frac{1}{2}$ und Varianz $\frac{1}{2}(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2})=\frac{1}{4}$ hat, ist der Erwartungswert für die Anzahl der Nullen $500\,000$, und die Varianz ist $250\,000$, und genau das sind auch Erwartungswert und Varianz der gesuchten Normalverteilung.

c) Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Anteil der Nullen zwischen 49,9% und 50,1% liegt!

Lösung: In absoluten Zahlen liegt dann die Anzahl der Nullen zwischen $499\,000$ und $501\,000$. Wie üblich beim Rechnen mit Normalverteilungen gehen wir über zur normierten Variablen: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine standard-normalverteilte Variable zwischen

$$\frac{499\,000-500\,000}{\sqrt{250\,000}} \quad \text{und} \quad \frac{501\,000-500\,000}{\sqrt{250\,000}}$$

liegt, also zwischen

$$\pm\frac{1\,000}{\sqrt{250\,000}}=\pm 2$$

liegt. Mit

$$F(z)=\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

ist die Wahrscheinlichkeit somit gleich

$$F(2)-F(-2)=F(2)-\big(1-F(2)\big)=2F(2)-1\approx 95{,}45\%$$

d) Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Anteil der Nullen zwischen 49% und 50% liegt!

Lösung: Hier ist die Abweichung vom Mittelwert ± 20 Standardabweichungen; die Wahrscheinlichkeit ist also für alle praktischen Zwecke gleich eins. ($2F(20)-1\approx 1-0{,}55\cdot 10^{-88}$, aber diese Genauigkeit ist weit jenseits derer der Approximation der BERNOULI-Verteilung durch eine Normalverteilung.)

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Ein beliebtes, weil einfaches Verfahren zur näherungsweisen Erzeugung (standard)-normalverteilter Zufallsvariablen besteht darin, daß man zwölf voneinander unabhängige im Intervall $[0,\,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen addiert und sechs vom Ergebnis subtrahiert. Begründen Sie, warum dieses Verfahren einigermaßen brauchbare Ergebnisse liefert!

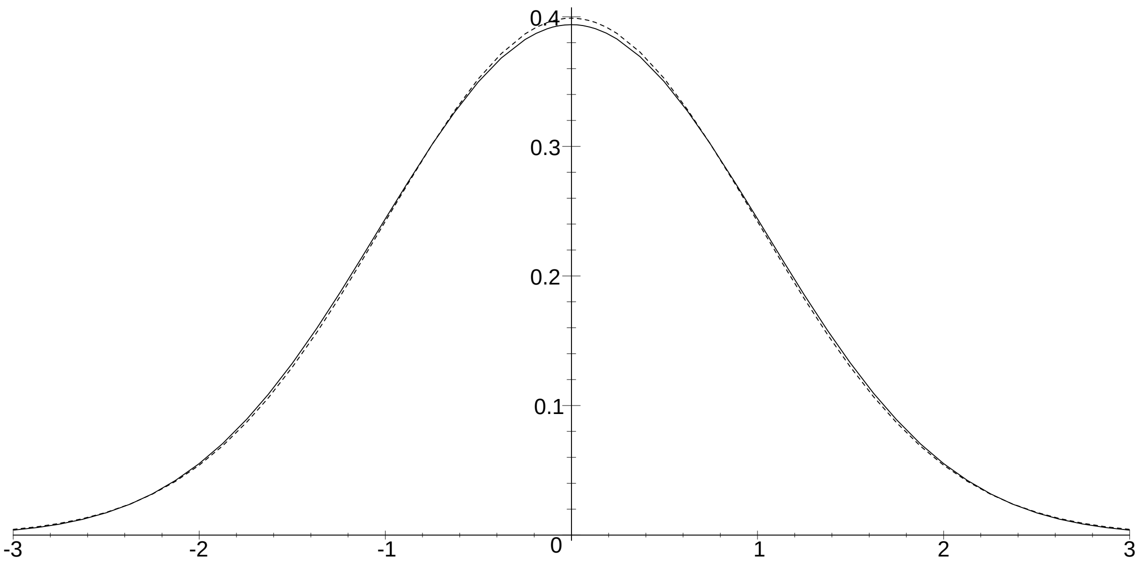
Lösung: Jede einzelne der Zufallsvariablen hat Erwartungswert $\frac{1}{2}$ und Varianz

$$\int\limits_0^1 \Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2\,dx=\int\limits_{-1/2}^{1/2} u^2\,du=\frac{1}{12}\,;$$

die Summe hat also Erwartungswert sechs und Varianz eins. Nach Subtraktion von sechs erhalten wir eine Zufallsvariable mit Erwartungswert null und Varianz eins.

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist eine Summe voneinander unabhängiger identischer Zufallsvariablen mit wachsender Zahl der Summanden in immer besserer Näherung normalverteilt; zwölf Summanden sind zwar noch nicht sonderlich viel, aber einigermaßen sollte die Normalverteilung doch angenähert werden.

NB: Tatsächlich wird sie sogar recht gut angenähert: Untenstehende Abbildung zeigt die Verteilungsdichte fett ausgezogen und dazu gestrichelt die Verteilungsdichte einer Normalverteilung:



Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

Die beiden Zufallsvariablen X und Y seien verteilt gemäß der gemeinsamen Dichtefunktion $f(x,y) = xe^{-x-xy}$ für $x, y > 0$ und $f(x,y) = 0$ sonst. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X|Y)$!

Hinweis: $\int xe^{ax}\,dx = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax} + C$ und $\int x^2e^{ax}\,dx = \frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}e^{ax} + C$

Lösung:

$$f_y(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,dx = \int_0^\infty xe^{-x-xy}\,dx = \frac{1}{(y+1)^2}\,,$$

denn das hintere Integral hat dieselbe Form wie das erste Integral aus dem Hinweis. Also ist

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{xe^{-x-xy}}{(y+1)^2}$$

und

$$\mathbb{E}(X|Y) = \int_0^\infty xf(x|Y)\,dx = \int_0^\infty \frac{x^2e^{-x-xY}}{(Y+1)^2}\,dx = \frac{1}{(Y+1)^2}\int_0^\infty x^2e^{-x-xY}\,dx\,.$$

Das hintere Integral hat dieselbe Form wie das zweite Integral aus dem Hinweis; somit ist

$$\mathbb{E}(X|Y) = \left(x^2 - \frac{2x}{(Y+1)} - \frac{2}{(Y+1)^3}\right)e^{-x-xY}\bigg|_0^\infty = \frac{2}{(Y+1)^3}\,,$$

denn für $x \to \infty$ sorgt die Exponentialfunktion dafür, daß alles verschwindet.