WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

12. Juni 2001

8. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Eine Funktion $Z: \Omega \to \mathbb{R}^2$ läßt sich stets als Produkt $X \otimes Y$ von Funktionen $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ schreiben.

Lösung: *Richtig;* für jedes $\omega \in \Omega$ setze man, falls $Z(\omega) = (x, y)$ ist, einfach $X(\omega) = x$ und $Y(\omega) = y$.

2) Richtig oder falsch: Wird auf Ω die Struktur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eines Wahrscheinlichkeitsraums definiert, so ist in dieser Situation $P_Z = P_X \otimes P_Y$.

Lösung: *Falsch:* Sei etwa beim Würfeln Z die jedem Wurf das Paar aus Augenzahl oben und Augenzahl unten zuordnet. P_X und P_Y sind dann Gleichverteilungen, deren Produkt $P_X \otimes P_Y$ jedem möglichen Wertepaar die Wahrscheinlichkeit $1/36$ zuordnet. Z kann aber nur sechs Wertepaare annehmen.

3) Richtig oder falsch: X sei eine normalverteilte Zufallsvariable und $Y = X^2$. Dann sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen.

Lösung: *Falsch:* Beispielsweise hat das Ereignis „$X < -2$ und $Y > 4$“ dieselbe Wahrscheinlichkeit wie „$X < -2$“, obwohl die Wahrscheinlichkeit für $Y > 4$ sehr klein ist.
NB: Dies zeigt, daß Unabhängigkeit eine stärkere Aussage ist als Unkorreliertheit, denn falls X Erwartungswert null hat, sind X und Y unkorreliert – siehe Blatt 7, Frage 5.

4) Richtig oder falsch: Die marginalen Verteilungen P_X und P_Y legen die Verteilung $P_{X \otimes Y}$ eindeutig fest.

Lösung: *Falsch:* Das Gegenbeispiel zu Frage 2 widerlegt auch diese Behauptung.

5) X und Y seien voneinander unabhängige POISSON-verteilte Zufallsvariablen; die Parameter seinen λ und μ. Welchen Erwartungswert hat XY?

Lösung: Wegen der Unabhängigkeit der beiden Zufallsvariablen ist

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \lambda\mu\,.$$

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)
Für $\lambda, \mu > 0$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei $\varphi(x, y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} & \text{für } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

a) Zeigen Sie, daß φ als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden kann, und berechnen Sie die zweidimensionale Verteilungsfunktion dazu!

Lösung: $\varphi(x,y)$ kann genau dann als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, wenn alle Funktionswerte nichtnegativ sind (was hier klar ist) und wenn das Integral über ganz $\mathbb{R}^2$ den Wert eins hat. Wir berechnen gleich etwas allgemeiner das Integral $F(a,b)$ über die durch $x \le a$ und $y \le b$ charakterisierte Teilmenge A von $\mathbb{R}^2$. Dieses verschwindet (genau wie der Integrand) wenn a oder b negativ ist, ansonsten ist

$$\begin{aligned} F(a,b) &= \iint_A \varphi(x,y)\,dx\,dy = \iint_A \lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\,dx\,dy = \lambda\mu \cdot \int_0^a e^{-\lambda x}\,dx \cdot \int_0^b e^{-\mu y}\,dy \\ &= \lambda\mu \cdot \frac{e^{-\lambda a}-1}{-\lambda} \cdot \frac{e^{-\mu b}-1}{-\mu} = (1-e^{-\lambda a})(1-e^{-\lambda b})\,. \end{aligned}$$

Insbesondere konvergiert dies gegen eins für $a \to \infty$ und $b \to \infty$, so daß φ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist mit Verteilungsfunktion F.

b) φ sei die Wahrscheinlichkeitsdichte einer zweidimensionalen Zufallsvariablen $X \otimes Y$. Bestimmen Sie die marginalen Dichten von X und Y!

Lösung: Die marginale Dichte φ_X von X ist

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\,dy\,,$$

was für $x < 0$ verschwindet, da dann der Integrand verschwindet. Ansonsten ist

$$\varphi_X(x) = \int_0^\infty \lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\,dy = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu \int_0^\infty e^{-\mu y}\,dy = \lambda e^{-\lambda x}$$

die Dichte einer Exponentialverteilung mit Parameter λ. Genauso ist

$$\varphi_Y(y) = \mu e^{-\mu y}$$

die Dichte einer Exponentialverteilung mit Parameter μ.

c) Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $X > Y + 1$?

Lösung: Hier muß die Wahrscheinlichkeitsdichte integriert werden über

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \ge 0, y \ge 0, x > y+1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y < x-1\right\},$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte ist also

$$\begin{aligned} \iint_A \lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\,dx\,dy &= \lambda\mu \int_1^\infty \int_{x-1}^\infty e^{-\lambda x-\mu y}\,dx\,dy = \lambda\mu \int_1^\infty e^{-\lambda x}\left(\int_{x-1}^\infty e^{-\mu y}\,dy\right)dx \\ &= \lambda \int_1^\infty e^{-\lambda x} e^{-\mu(x-1)}\,dx = e^\mu \lambda \int_1^\infty e^{-(\lambda+\mu)x}\,dx \\ &= \frac{\lambda e^\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{\lambda+\mu}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß $\varphi(x,y) = \begin{cases} \alpha e^{-x^2-y} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}^2$ definiert!

Lösung: Da $\phi(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, kommt es nur darauf an, daß das Integral über den $\mathbb{R}^2$ den Wert eins hat. Dieses Integral ist gleich

$$\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-x^2-y}\, dx\, dy = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-y}\, dy = \alpha \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 = \alpha\sqrt{\pi}\,.$$

Somit muß

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

gesetzt werden.

b) φ sei die Wahrscheinlichkeitsdichte einer zweidimensionalen Zufallsvariablen $X \otimes Y$. Bestimmen Sie die marginalen Dichten von X und Y!

Lösung: Die marginale Dichte φ_X von X ist

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x^2-y}\, dy = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-y}\, dy = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,,$$

die von Y ist

$$\varphi_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y}\, dx = \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = e^{-y}\,.$$

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X^2Y^2!

Lösung:

$$\mathbb{E}(X^2Y^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} x^2y^2 \cdot e^{-x^2-y}\, dx\, dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx \cdot y^2 e^{-y}\, dy\,.$$

Das Integral über x, zusammen mit dem Vorfaktor, berechnet das zweite Moment einer Normalverteilung mit Erwartungswert null und Varianz $\frac{1}{2}$, ist also gleich $\frac{1}{2}$.
Das Integral über y berechnet das zweite Moment einer Exponentialverteilung mit Parameter eins; nach Aufgabe 2c des siebten Übungsblatts ist das gleich zwei. Der gesuchte Erwartungswert ist somit gleich eins.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Für zwei Zufallsvariablen $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ habe $P_{X\otimes Y}$ die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+(x-y)^2\right)}\,.$$

a) Berechnen Sie die marginalen Dichten von X und Y!

Lösung: Die marginale Dichte von X ist

$$\begin{aligned}\varphi_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+(x-y)^2\right)}\,dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}\,dy\\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,,\end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung des Integrals auf der Substitution $u = y - x$ beruht.
Für die Berechnung der marginalen Dichte von Y ist es zweckmäßig, den Exponenten so umzuformen, daß ein y-Term isoliert werden kann:

$$x^2 + (x-y)^2 = 2x^2 - 2xy + y^2 = 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2}$$

führt auf

$$\begin{aligned}\varphi_Y(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+(x-y)^2\right)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}}\,dx\\ &= \frac{e^{-\frac{y^2}{4}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}\,dx = \frac{e^{-\frac{y^2}{4}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{e^{-\frac{y^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}\,.\end{aligned}$$

b) Welche Erwartungswerte haben X und Y ?

Lösung: X und Y sind normalverteilt mit Erwartungswert null und Varianz eins *bzw.* zwei. Ihre Erwartungswerte sind also null.

c) Wie groß sind Kovarianz und Korrelation von X und Y ?

Lösung: Diese Frage wäre einfach zu beantworten, wenn X und Y voneinander unabhängig wären, was sie aber leider nicht sind. Dafür sind aber X und $U = Y - X$ voneinander unabhängig: Für $X \otimes U$ ist die Verteilungsdichte

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+u^2)}$$

das Produkt der beiden Randverteilungen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,.$$

Somit ist $\mathrm{Cov}(X, U) = 0$. Da $Y = X + U$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\Big) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}\big(X(X+U)\big) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(XU)\\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Cov}(X,U) = 1 + 0 = 1\,.\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Korrelation müssen wir durch die Wurzel aus dem Produkt der Varianzen von X und Y dividieren, also durch $\sqrt{2}$, und erhalten

$$\rho(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$