Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

6. Juni 2001

7. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Die Zufallsvariable X modelliere das Werfen eines Würfels. Wie sieht ihre momenterzeugende Funktion aus?

Lösung:

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} e^{\lambda k} = \frac{e^{7\lambda} - e^{\lambda}}{e^{\lambda} - 1} = \frac{e^{\lambda}(e^{6\lambda} - 1)}{e^{\lambda} - 1}$$

2) *Richtig oder falsch:* Die momenterzeugende Funktion ψ einer Verteilung, so sie existiert, nimmt an der Stelle null den Wert eins an.

Lösung: *Richtig,* denn $\psi(0) = \int e^{0\cdot X}\,d\mu = \int d\mu = 1$.

3) Was ist die Kovarianz einer Zufallsvariablen mit sich selbst?

Lösung:

$$\operatorname{Cov}(X, X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\Big) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big)$$

ist die Varianz von X.

4) Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall [0, 1]. Berechnen Sie die Kovarianz zwischen X und $Y = X^2$!

Lösung: Der Erwartungswert von X^n ist $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$. Also ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \tfrac{1}{2}\big)\big(X^2 - \tfrac{1}{3}\big)\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X + \frac{1}{6}\Big) = \mathbb{E}(X^3) - \frac{1}{2}\mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{3}\mathbb{E}(X) + \frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,.\end{aligned}$$

5) *Richtig oder falsch:* X sei eine normalverteilte Zufallsvariable und $Y = X^2$. Dann sind X und Y unkorreliert.

Lösung: Für standardnormalverteiltes X ist in der Tat

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(X^2 - \mathbb{E}(X^2)\big)\Big) = \mathbb{E}\big(X(X^2 - 1)\big) = \mathbb{E}\big(X^3 - X\big) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X) = 0\,,$$

so daß X und Y unkorreliert sind, und das war eigentlich gemeint.

In der Aufgabenstellung fehlt allerdings der Zusatz „Standard“, und für eine Normalverteilung mit Erwartungswert ungleich null ist die Behauptung falsch: Sei X etwa normalverteilt mit Erwartungswert und Varianz eins; wegen

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

ist dann $\mathbb{E}(X^2) = 2$ und

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-1)(X^2-2)\big) = \mathbb{E}\big(X^3 - X^2 - 2X + 2)\big) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X) + 2\,.$$

Aus Symmetriegründen ist $\mathbb{E}\big((X-1)^3)\big) = 0$, also

$$0 = \mathbb{E}\big((X-1)^3)\big) = \mathbb{E}(X^3) - 3\mathbb{E}(X^2) + 3\mathbb{E}(X) - 1 = \mathbb{E}(X^3) - 6 + 3 - 1 = \mathbb{E}(X^3) - 4$$

oder $\mathbb{E}(X^3) = 4$, und

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 4 - 2 - 2 + 2 = 2\,.$$

Sowohl für die Antwort *richtig* mit (korrekter) Begründung für eine Standardnormalverteilung als auch für die Antwort *falsch* mit (korrektem) Gegenbeispiel gibt es volle Punktzahl.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie: Eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung ist durch ihre momenterzeugende Funktion eindeutig bestimmt!

Lösung: Angenommen, es gebe zwei verschieden verteilte diskrete Zufallsvariablen mit derselben momenterzeugenden Funktion. Wir bilden die Vereinigungsmenge $\{x_1, x_2, \dots\}$ der Wertebereiche der beiden und bezeichnen mit p_k bzw. q_k die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wert x_k von X bzw. Y angenommen wird. (Falls x_k nicht im Wertebereich einer der beiden Variablen liegt, ist diese Wahrscheinlichkeit natürlich einfach gleich null.) Dann sind

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \sum_k p_k e^{\lambda x_k} \quad \text{und} \quad \mathbb{E}(e^{\lambda Y}) = \sum_k q_k e^{\lambda x_k}$$

gleich, also

$$\sum_k (p_k - q_k) e^{\lambda x_k} \equiv 0\,.$$

Wir müssen also zeigen, daß es keine solche Relation geben kann, bei der ein von null verschiedener Koeffizient auftritt.

Angenommen doch; dann wählen wir eine minimale Menge K von Indizes derart, daß es eine Relation der Form

$$\sum_{k\in K} a_k e^{\lambda x_k} \equiv 0$$

gibt mit reellen Zahlen a_k. Differentiation nach λ zeigt, daß dann auch

$$\sum_{k\in K} x_k a_k e^{\lambda x_k} \equiv 0$$

ist. Multiplikation der obigen Relation mit x_ℓ für ein festes $\ell \in K$ ergibt

$$\sum_{k\in K} x_\ell a_k e^{\lambda x_k} \equiv 0\,,$$

also auch
$$\sum_{k\in K}(x_\ell - x_k)a_k e^{\lambda x_k} \equiv 0\,.$$
Hier wird aber tatsächlich nur über die kleinere Menge $K - \{\ell\}$ summiert, da der Koeffizient an der Stelle $k = \ell$ verschwindet. Dieser Widerspruch zur Minimalität von K beweist die Behauptung.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie für eine Exponentialverteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichte $\lambda e^{-\lambda x}$ die momenterzeugende Funktion $\psi(t)$!

Lösung: Da die Exponentialverteilung für $x < 0$ verschwindende Dichte hat, müssen wir bei der Berechnung der Erwartungswerte ab null integrieren statt ab $-\infty$.
$$\psi(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}\,dx = \frac{\lambda}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)x}\Big|_0^\infty\,.$$
Für $t < \lambda$ existiert und verschwindet der Limes für die obere Grenze; dann ist also
$$\psi(t) = \frac{\lambda}{t-\lambda}\cdot(0-1) = \frac{\lambda}{\lambda - t}\,.$$

b) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist ψ definiert?

Lösung: Wie wir gerade gesehen haben nur für $t < \lambda$.

c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Exponentialverteilung!

Lösung:
$$\psi'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$
hat an der Stelle null den Wert $1/\lambda$, dies ist also der Erwartungswert.
Das zweite Moment ist der Wert an der Stelle null von
$$\psi''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\,,$$
also $2/\lambda^2$. Nach der Formel
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
ist die Varianz somit gleich
$$\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die Schiefe $\mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^3\Big)$ der Verteilung einer Zufallsvariablen läßt sich berechnen als
$$\mathbb{E}(X^3) + \mathbb{E}(X)\cdot\big(2\mathbb{E}(X)^2 - 3\mathbb{E}(X^2)\big)\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^3\Big) &= \mathbb{E}\Big(X^3 - 3X^2\,\mathbb{E}(X) + 3X\,\mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X)^3\Big)\\ &= \mathbb{E}(X^3) - 3\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(X) + 3\mathbb{E}(X)^3 - \mathbb{E}(X)^3\\ &= \mathbb{E}(X^3) - 3\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(X)^3\\ &= \mathbb{E}(X^3) + \mathbb{E}(X)\big(2\mathbb{E}(X)^2 - 3\mathbb{E}(X^2)\big)\,.\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die Schiefe der POISSON-Verteilung in Abhängigkeit vom Parameter λ der Verteilung!

Lösung: Laut Vorlesung ist der Erwartungswert der POISSON-Verteilung gleich λ, das zweite Moment ist $\lambda+\lambda^2$, und die momenterzeugende Funktion ist

$$\psi(t) = e^{\lambda(e^t-1)}\,.$$

Deren dritte Ableitung ist

$$\psi'''(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + 3\lambda^2 e^{2t} e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda^3 e^{3t} e^{\lambda(e^t-1)}\,,$$

was für $t=0$ den Wert

$$\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3$$

hat. Die Schiefe ist somit gleich

$$\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda\big(2\lambda^2 - 3(\lambda+\lambda^2)\big) = \lambda\,.$$

c) Dasselbe für die Exponentialverteilung!

Lösung: Die ersten beiden Momente und die momenterzeugende Funktion sind bekannt aus der der vorigen Aufgabe; das dritte Moment ist der Wert an der Stelle null von

$$\psi'''(t) = \frac{6\lambda}{(\lambda-t)^4}\,,$$

also $6/\lambda^3$. Die Schiefe ist daher

$$\frac{6}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{2}{\lambda^2} - \frac{3\cdot 2}{\lambda^2}\right) = \frac{6}{\lambda^3} - \frac{4}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^3}\,.$$

d) Geben Sie eine anschauliche Interpretation der Vorzeichen der berechneten Schiefen!

Lösung: In beiden Fällen ist die Schiefe positiv, da wir jeweils nur positive Parameter λ betrachten. Dies bedeutet, das es mehr Werte gibt, die stark in positiver Richtung vom Erwartungswert abweichen als solche, die dies in negativer Richtung tun. Dies ist auch einigermaßen klar von den Bildern der Verteilungen, die nach links durch die Null begrenzt sind, wohingegen sie nach rechts unbegrenzt sind.