WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

30. Mai 2001

6. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

Sei $\Omega = \{1,2,3\}$ und $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1,3\}, \{2\}, \Omega\big\}$ mit $\mu\big(\{2\}\big) = \frac{1}{2}$ und $\mu(\Omega) = 1$. Überlegen Sie sich für jede der folgenden Funktionen f, ob $\int_\Omega f\,d\mu$ existiert, und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert dieses Integrals!

1) $f(\omega) \equiv 5$

Lösung: Dies ist ein „Rechteck" der Höhe fünf mit Basis Ω; der Wert des Integrals ist also $5\mu(\Omega) = 5$.

2) $f(\omega) = \omega$

Lösung: Diese Funktion ist nicht meßbar, denn $\big\{\omega \in \Omega \bigm| f(\omega) \geq 3\big\} = \{3\}$ liegt nicht in $\{calA\}$. Damit existiert das Integral nicht.

3) $f(\omega) = 1 + (2-\omega)^2$

Lösung: $f(\omega) = 1$ für $\omega = 2$ und $f(\omega) = 2$ für $\omega \in \{1,3\}$. Damit ist f die Elementarfunktion $1_{\{2\}} + 2 \cdot 1_{\{1,3\}}$. Wegen $\mu\big(\{2\}\big) = \frac{1}{2}$ und $\mu(\Omega) = 1$ ist auch $\mu\big(\{1,3\}\big) = \frac{1}{2}$, also

$$\int_\Omega f\,d\mu = 1 \cdot \mu\big(\{2\}\big) + 2 \cdot \mu\big(\{1,3\}\big) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}\,.$$

4) Für $\mathbb{R}$ sei ein Maß ν auf der σ-Algebra $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ definiert durch $\nu(\mathbb{Q}) = \frac{1}{10}$ und $\nu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \frac{9}{10}$. Berecchnen Sie $\int_R f\,d\nu$ für die DIRICHLETsche Sprungfunktion $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ sonst!

Lösung: f ist hier die charakteristische Funktion einer meßbaren Menge, also ist

$$\int_R f(x)\,d\nu = \nu(\mathbb{Q}) = \frac{1}{10}\,.$$

5) $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu\big)$ sei der übliche Maßraum für die reellen Zahlen. Was ist $\int_R f\,d\mu$ für die DIRICHLETsche Sprungfunktion?

Lösung: Als abzählbare Vereinigung einelementiger Mengen liegt $\mathbb{Q}$ auch in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; da jede einelementige Menge dort Maß null hat, ist $\mu(\mathbb{Q}) = 0$. Somit ist hier

$$\int_R f(x)\,d\mu = \mu(\mathbb{Q}) = 0\,.$$

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
In zehn preußischen Kavallerieregimentern wurden über zwanzig Jahre hinweg die jährlichen Todesfälle durch Hufschlag gezählt: 109 mal gab es *keine* Todesfälle, 65 mal einen, 22 mal zwei, dreimal drei und einmal kam es vor, daß ein Regiment während eines Jahres vier Tote zu beklagen hatte. Finden Sie eine POISSON-Verteilung, die diese Zahlen ungefähr beschreiben könnte, und vergleichen Sie die aufgrund dieser Verteilung berechneten Wahrscheinlichkeiten mit den beobachteten Häufigkeiten!

Lösung: Insgesamt gab es

$$65 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 122$$

Todesfälle durch Hufschlag, also im Mittel

$$\frac{122}{10 \cdot 20} = 0{,}61$$

pro Jahr und Regiment. Falls sich die Häufigkeiten pro Jahr und Regiment durch eine POISSON-Verteilung beschreiben lassen, sollte deren Erwartungswert gleich diesem Mittel sein. Da der Erwartungswert einer POISSON-Verteilung gleich dem Parameter ist, vergleichen wir also mit einer POISSON-Verteilung mit Parameter $\lambda = 0{,}61$; die erwartete Wahrscheinlichkeit für k Todelsfälle in einem Jahr und Regiment ist dann

$$P(X = k) = \frac{e^{-0{,}61} \cdot 0{,}61^k}{k!} \approx \frac{0{,}331444 \cdot 0{,}61^k}{k!}\,.$$

Die erwartete Anzahl von Fällen, daß es in einem Jahr in einem Regiment k Todesfälle durch Hufschlag gab, ist $200 \cdot P(X = k)$, da es 200 Paare aus Jahren und Regimentern gibt. In Zahlenwerten ergibt sich (auf zwei Nachkommastellen gerundet)

k	*tatsächliche Fallzahl*	*tatsächliche Häufigkeit*	*berechnete Wahrscheinlichkeit*	*berechnete Fallzahl*
0	109	54,50%	54,34%	108,67
1	65	32,50%	33,14%	66,29
2	22	11,00%	10,11%	20,22
3	3	1,50%	2,06%	4,11
4	1	0,50%	0,31%	0,63
≥ 5	0	0,00%	0,04%	0,08

Die letzte berechnete Wahrscheinlichkeit 0,08 wurde berechnet als eins minus Summe der darüberstehenden Werte. Wie man sieht ist die Übereinstimmung zwischen theoretisch berechneten und tatsächlich beobachteten Werten in der Tat sehr gut (weshalb dieses Beispiel auch in vielen Statistiklehrbüchern zu finden ist).

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Die Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nehme nur Werte im Intervall $[0, 1]$ ein. Ihre Verteilungsfunktion sei gegeben durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte der Form $f(t) = \gamma t(1 - t)$ auf $[0, 1]$ und $f(t) = 0$ sonst mit einer Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Wert von γ!

Lösung: Für eine Wahrscheinlichkeitsdichte f muß $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$ sein. Hier verschwindet f außerhalb des Intervalls [0, 1], also ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int\limits_0^1 \gamma t(1-t)\,dt = \gamma \int\limits_0^1 (t-t^2)\,dt = \gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{\gamma}{6}\,,$$

was nur für $\gamma = 6$ den Wert eins hat.

b) Wie sieht die Verteilungsfunktion von X aus?

Lösung: Die Verteilungsfunktion ist

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,.$$

Für $x < 0$ ist daher $F(x) = 0$, und für $x \geq 1$ ist $F(x) = 1$, da X dann mit Sicherheit einen Wert annimmt, der $\leq x$ ist. Für $x \in [0,\,1]$ ist

$$F(x) = 6\int\limits_0^x t(1-t) = 6\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right) = 3x^2 - 2x^3\,.$$

c) Welchen Erwartungswert hat X?

Lösung:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,dt = 6\int\limits_0^1 t^2(1-t)\,dt = 6\int\limits_0^1 (t^2-t^3)\,dt = 6\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\,,$$

wie es wegen der Symmetrie von f auch nicht anders zu erwarten war.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) X sei eine Zufallsvariable, die nur natürliche Zahlen als Werte annehme. Zeigen Sie: Dann ist $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$

Lösung: Die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P(X\geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(X=k) = \sum_{\substack{(n,k)\in N\times N\\ k\geq n}} P(X=k) = \sum_{\substack{(k,n)\in N\times N\\ n\leq k}} P(X=k)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) = E(X).\end{aligned}$$

b) X sei eine positive Zufallsvariable mit Dichtefunktion f und Verteilungsfunktion $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Dann ist $E(X) = \int\limits_0^{\infty} \big(1-F(x)\big)\,dx$.

Lösung: Der Integrand der rechten Seite ist

$$1 - F(x) = 1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{x}^{\infty} f(t)\,dt\,,$$

da das Integral über f über ganz $\mathbb{R}$ gleich eins sein muß. Also ist nach dem Satz von FUBINI

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \big(1 - F(x)\big)\,dx &= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right) dx = \iint\limits_{\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (0\le x\le t\right\}} f(t)\,dt\,dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t)\,dx\right) dt = \int_0^\infty t f(t)\,dt = E(X)\,.\end{aligned}$$