Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

23. Mai 2001

5. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Wenn zwei Zufallsvariablen $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ dieselbe Verteilungsfunktion haben, stimmen sie überein.

Lösung: *Falsch:* Für $\Omega = [0, 1]$ sei etwa $X(\omega) = \omega$ für alle ω und $Y(\omega) = \omega$ außer für $\omega = \frac{1}{2}$ mit $Y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Dann sind beide gleichverteilt mit denselben Parametern.

2) *Richtig oder falsch:* Für $X: \Omega \to \mathbb{R}$ gibt es höchstens endlich viele $x \in \mathbb{R}$ mit $P_X\big(\{x\}\big) > 0$.

Lösung: *Falsch:* Für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable is $P_X\big(\{x\}\big) > 0$ für jede nichtnegative ganze Zahl x.

3) *Richtig oder falsch:* Die Verteilungsfunktion von X sei stetig. Dann ist $P_X(\mathbb{Q}) = 0$.

Lösung: *Richtig:* Wegen der Stetigkeit der Verteilungsfunktion ist $P_X\big(\{x\}\big) = 0$ für jede einelementige Menge; da $\mathbb{Q}$ eine abzählbare Vereinigung einelementiger Mengen ist, folgt die Behauptung also aus der σ-Additivität von Maßen.

4) *Richtig oder falsch:* Der Wert einer normalverteilten Zufallsvariablen ist fast sicher irrational.

Lösung: *Richtig:* Da die Verteilungsfunktion stetig ist, folgt aus der Lösung der vorigen Frage, daß $P_X(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 1 - P_X(\mathbb{Q}) = 1$ ist.

5) X ordne jedem Tag die Anzahl der an diesem Tag kaputtgehenden Leuchtröhren im Hörsaal zu. Welche der Verteilungen aus der Vorlesung kommt für X in Frage?

Lösung: Falls man davon ausgeht, daß die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall einer Röhre in einem gewissen Zeitabschnitt nicht von der Zeit abhängt, ist die Poisson-Verteilung am besten geeignet. Eine Modellierung mit Binomialverteilungen wäre zur Not auch möglich.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)
Die Lebenserwartung eines Produkts sei exponentialverteilt mit Verteilungsdichte $\lambda e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$ und null sonst.

a) Ab welchem Zeitpunkt sind nur noch die Hälfte aller Produkte funktionsfähig?

Lösung: Ausgedrückt durch die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

ist der Anteil der bis zum Zeitpunkt t_0 ausgefallenen Produkte $F(t_0) = 1 - e^{-\lambda t_0}$, der Anteil der noch funktionsfähigen also $1 - F(t_0) = e^{-\lambda t_0}$.

$$e^{-\lambda t_0} = \frac{1}{2} \iff -\lambda t_0 = -\ln 2 \iff t_0 = \frac{\ln 2}{\lambda} .$$

Zum Zeitpunkt $\frac{\ln 2}{\lambda}$ funktioniert daher noch genau die Hälfte aller Produkte.

b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(t, \tau)$ dafür, daß ein Produkt, das zum Zeitpunkt t noch funktionsfähig ist, bis zum Zeitpunkt $t + \tau$ defekt ist, und interpretieren Sie das Ergebnis!

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Produkt zwischen den Zeiten t und $t+\tau$ ausfällt, ist gleich der Differenz zwischen den Wahrscheinlichkeiten für einen Ausfall spätestens zum Zeitpunkt $t + \tau$ und einem Ausfall bis zum Zeitpunkt t, mit der Bezeichnung aus *a)* also $F(t+\tau)-F(t)$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Produkt zum Zeitpunkt t noch funktioniert ist $1 - F(t)$, die bedingte Wahrscheinlichkeit somit der Quotient

$$P(t, \tau) = \frac{F(t + \tau) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{\left(1 - e^{-\lambda(t+\tau)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda\tau} .$$

Da dies nicht von t abhängt, arbeitet das Produkt zu jedem Zeitpunkt seiner Lebensdauer gleich zuverlässig: Die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls in der nächsten Stunde ist für ein neues Produkt genauso groß wie für ein altes.

c) Der Grenzwert $\lim_{\tau\to 0} P(t, \tau)/\tau$ wird als Ausfallrate bezeichnet. Berechnen Sie diese!

Lösung: Zähler und Nenner des Ausdrucks

$$\frac{P(t, \tau)}{\tau} = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\tau}$$

verschwinden an der Stelle $\tau = 0$; nach DE L'HÔPITAL ist also

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{P(t, \tau)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0} \frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{1} = \lambda ;$$

die Ausfallrate ist mithin unabhängig vom Alter immer gleich λ.

d) Wie hängt die Ausfallrate von t ab, wenn man statt von einer Exponentialverteilung von der WEIBULL-Verteilung mit Verteilungsfunktion $1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^p}$ für $t \geq 0$ ausgeht? $(a, p > 0)$

Lösung: Die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall zwischen t und $t+\tau$ ist gleich

$$\frac{F(t + \tau) - F(t)}{1 - F(t)} ,$$

wobei F hier die Verteilungsfunktion der WEIBULL-Verteilung bezeichnet, und die Ausfallrate ist

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{F(t + \tau) - F(t)}{\big(1 - F(t)\big) \cdot \tau} = \frac{1}{1 - F(t)} \lim_{\tau\to 0} \frac{F(t + \tau) - F(t)}{\tau} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} .$$

$F'(t)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der WEIBULL-Verteilung; eine einfache Anwendung der Kettenregel zeigt, daß

$$F'(t) = \frac{p}{a} \left(\frac{t}{a}\right)^{p-1} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^p}$$

ist. Die Ausfallrate ist somit

$$\frac{\frac{p}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{p-1} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^p}}{e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^p}} = \frac{p}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{p-1} .$$

Bemerkung: Für $p = 1$ ist die WEIBULL-Verteilung einfach eine Exponentialverteilung mit $\lambda = \frac{1}{a}$. Für $p > 1$ wächst die Ausfallrate mit der Zeit, alte Produkte sind also anfälliger als neue, wie man das bei nicht regelmäßig gewarteten technischen Produkten auch erwartet. Für $p < 1$ dagegen *sinkt* die Ausfallrate mit der Zeit; damit kann man etwa Ausfälle von Softwareprodukten modellieren, die oft erst nach mehreren *bug fixes* einigermaßen stabil laufen, oder sonstige Produkte mit Kinderkrankheiten.

Die Exponentialverteilung läßt sich übrigen auch charakterisieren durch die Zeitunabhängigkeit der Ausfallrate: Ist F irgendeine Verteilungsfunktion, so ist die Ausfallrate zur Zeit t nach obiger Rechnung gleich

$$\frac{F'(t)}{1 - F(t)} .$$

Ist dies eine Konstante λ, so ist

$$F'(t) = \lambda\big(1 - F(t)\big) \quad \text{für alle } t \geq 0 .$$

Für die Funktion $G(t) = 1 - F(t)$ ist daher

$$-G'(t) = \lambda G(t) \quad \text{oder} \quad G'(t) = -\lambda G(t) .$$

Damit ist $G(t) = \gamma e^{-\lambda t}$ mit einer Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}$. Da für eine Verteilungsfunktion zur Modellierung der Lebensdauer $F(0) = 0$ ist, ist $G(0) = 1$, d.h. $\gamma = 1$. Somit ist

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Auf der Rückseite finden Sie einige Funktionswerte von $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\, dt$. Beantworten Sie damit die folgenden Fragen:

a) Der jährliche Höchststand des Pegels Haltern des Flusses Stever ist ungefähr normalverteilt mit den Parametern $\mu = 4\,m$ und $\sigma = 2\,m$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Höchststand eines Jahres zwischen zwei und drei Metern liegt?

Lösung: In normalisierten Daten entsprechen die beiden Grenzen den Werten

$$z_1 = \frac{3\,m - 4\,m}{2\,m} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{2\,m - 4\,m}{2\,m} = -1 .$$

Wegen der Beziehung $F(-z) = 1 - F(z)$ ist

$$F(z_1) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad F(z_2) = 1 - F(1) ,$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$F(z_2) - F(z_1) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}841345 - 0{,}691462 = 0{,}149883$$

oder etwas mehr als eins zu sieben.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fluß nächstes Jahr irgendwann einen Pegelstand von mehr als sieben Metern erreicht?

Lösung: Sieben Meter entsprechen der normalisierten Variablen

$$z = \frac{7\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{m}} = 1{,}5\,;$$

die Wahrscheinlichkeit für einen Höchststand von bis zu sieben Metern ist also $F(1{,}5)$. Gesucht ist die komplementäre Wahrscheinlichkeit

$$1 - F(1{,}5) \approx 1 - 0{,}933193 = 0{,}066807 = 6{,}6807\%\,.$$

c) Ab welchem Pegelstand kann man von einem Jahrhunderthochwasser reden, von einem Höchststand also, der im Schnitt nur einmal alle hundert Jahre vorkommt?

Lösung: Wir suchen zunächst die zugehörige normalisierte Variable z. Für diese muß gelten $F(z) = 0{,}99$, denn in 99 von 100 Jahren soll der Pegelhöchststand unter diesem Wert liegen. Die Tabelle zeigt, daß $z \approx 2{,}33$ ist; der zugehörige Pegelstand ist

$$z \cdot 2\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{m} \approx 8{,}66\,\mathrm{m}\,.$$

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Eine Münze sei so präpariert, daß sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% beim Werfen das Ergebnis *Zahl* zeigt. Sie werde zehnmal geworfen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens achtmal das Ergebnis *Zahl* erscheint?

Lösung: Das einmalige Werfen der Münze ist ein BERNOULLI-Experiment; das Ergebnis eines zehnmaligen Werfens ist also binomialverteilt, und die Wahrscheinlichkeit für k mal *Zahl* ist

$$\binom{10}{k} 0{,}8^k \cdot 0{,}2^{10-k}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens achtmal *Zahl* ist also

$$\begin{aligned}\binom{10}{8}0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 + \binom{10}{9}0{,}8^9 \cdot 0{,}2 + \binom{10}{10}0{,}8^{10} &= 0{,}8^8\left(45 \cdot 0{,}2^2 + 10 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^2\right)\\ &= 0{,}6777995264\end{aligned}$$

und damit etwas mehr als zwei Drittel.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens viermal *Zahl*?

Lösung: Die ist entsprechend

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{10}{k} 0{,}8^k \cdot 0{,}2^{10-k} = 0{,}0063693824\,,$$

also nicht einmal ganz $\frac{2}{3}\%$.