Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

16. Mai 2001

4. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Ist $X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ der Borel-Mengen, so ist X eine stetige Abbildung.

Lösung: *Falsch:* $X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $X(\omega) = 1$ für $\omega = 0$ und $X(\omega) = 0$ sonst ist meßbar, aber unstetig.

2) *Richtig oder falsch:* Mit $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ist auch $e^X: \Omega \to \mathbb{R};\ \omega \mapsto e^{X(\omega)}$ meßbar.

Lösung: *Richtig:* Da die Exponentialfunktion injektiv und monoton ist, ist das Urbild eines Intervalls der Form $(-\infty, x)$ wieder ein Intervall dieser Form.

3) *Richtig oder falsch:* Bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ ist jede Abbildung $X: \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar.

Lösung: *Richtig,* denn das Urbild einer *jeden* Teilmenge von $\mathbb{R}$, insbesondere also einer jeden Borel-Menge, liegt natürlich in $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$.

4) Welche Abbildungen $X: \Omega \to \mathbb{R}$ sind meßbar bezüglich der trivialen σ-Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$?

Lösung: Da auch das Urbild einer einelementigen Menge meßbar sein muß, kann es nur leer oder ganz Ω sein. Die einzigen meßbaren Abbildungen sind daher die Konstanten.

5) *Richtig oder falsch:* Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar, so existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Lösung: *Falsch:* Die konstante Abbildung $f(x) \equiv 1$ ist meßbar, aber $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx$ divergiert.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Jeder Strahler der Laserorgel *SuperDelic 2001* erzeugt alle drei Sekunden einen Lichtblitz, der mit gleicher Wahrscheinlichkeit und unabhängig von seinem Vorgänger eine der Farben rot, blau, grün oder gelb hat.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß vor dem dritten roten Blitz mindestens zehn Blitze in anderen Farben kommen?

Lösung: Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, ist dies gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den ersten zwölf Blitzen mindestens zehn nichtrote sind. Dies ist auch gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den ersten zwölf Blitzen höchstens zwei rote sind, also gleich

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2}\binom{12}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{12-k} &= \frac{1}{4^{12}}\left(\binom{12}{0}\cdot 3^{12}+\binom{12}{1}\cdot 3^{11}+\binom{12}{2}\cdot 3^{10}\right)\\ &= \frac{3^{12}+12\cdot 3^{11}+66\cdot 3^{10}}{4^{12}} = \frac{6554439}{16777216}\\ &= 0{,}39067500829696655273437 5\,.\end{aligned}$$

b) Ein Besucher wettet, daß der Strahler links außen in den nächsten fünf Minuten mindestens dreißig blaue Blitze abgeben wird. Nach vier Minuten sind 23 blaue Blitze gezählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er seine Wette gewinnt?

Lösung: Er gewinnt genau dann, wenn unter den zwanzig Blitzen der fünften Minute mindestens sieben blaue sind, verliert also, wenn es nur zwischen null und sechs blaue gibt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$\sum_{k=0}^{6}\frac{20}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{20-k}\approx 0{,}7857819476\,,$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er gewinn also ungefähr

$$1-0{,}7857819476=0{,}2142180524\,.$$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

Zwei Spieler werfen gleichzeitig je einen Würfel; falls verschiedene Augenzahlen fallen, bezahlt der Spieler mit der niedrigeren Augenzahl eine Mark an den anderen.

a) Beschreiben Sie den Gewinn oder Verlust von Spieler eins durch eine Zufallsvariable auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum!

Lösung: Als Elementarereignisse bietet sich die Menge der möglichen Kombinationen von Augenzahlen an, also

$$\Omega=\big\{(i,j)\;\big|\;i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}\big\}\,.$$

(Es gibt natürlich auch andere Möglichkeiten.) Das Paar (i,j) ist dabei so zu interpretieren, daß der erste Spieler die Augenzahl i wirft und der zweite j. Der zugehörige Wahrscheinlichkeitsraum ist dann $\big(\Omega,\mathfrak{P}(\Omega),P\big)$ mit

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{\#A}{36}\,,$$

denn mangels genauerer Informationen nehmen wir an, daß alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind. Die Zufallsvariable, die den Gewinn von Spieler eins in Mark angibt, ist dann

$$X\colon\Omega\to\mathbb{R};\quad (i,j)\mapsto\begin{cases}\;\;1 & \text{falls } i>j\\ \;\;0 & \text{falls } i=j\\ -1 & \text{falls } i<j\end{cases}\,.$$

Mit der Meßbarkeit gibt es keine Probleme (*siehe* Frage 3).

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariablen explizit an!

Lösung: Es gibt sechs Fälle, in denen keine Auszahlung erfolgt; in den restlichen dreißig erhält der erste Spieler in der Hälfte aller Fälle eine Mark, in der anderen Hälfte zahlt er eine Mark. Die Werte ± 1 haben also beide die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12},$$

und der Wert null wird mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

angenommen. Damit ist

$$F(x) = P\Big(X^{-1}\big((-\infty, x)\big)\Big) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < -1 \\ \frac{5}{12} & \text{falls} \ -1 < x < 0 \\ \frac{7}{12} & \text{falls} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{falls} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

c) Das Spiel wird hundertmal wiederholt. Nach der neunzigsten Wiederholung hat Spieler eins insgesamt fünf Mark verloren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er am Ende verlustfrei abschneidet?

Lösung: Er schneidet genau dann verlustfrei ab, wenn er in den letzten zehn Spielen mindestens fünf Mark gewinnt. Sei k die Anzahl seiner Gewinne, ℓ die Anzahl der Gewinne des anderen Spielers und m die Anzahl der Spiele, bei denen beide die gleiche Augenzahl würfeln. Dann ist der Gewinn des ersten Spielers in den letzten zehn Spielen $k - \ell$.

Da $k + \ell \leq 10$ ist, kann die Ungleichung $k - \ell \geq 5$ nur erfüllt sein für $\ell \leq 2$; alsdann muß $k \geq 5 + \ell$ sein und $m = 10 - k - \ell$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür daß der zweite Spieler genau ℓ von zehn Spielen gewinnt, ist

$$\binom{10}{\ell} \left(\frac{5}{12}\right)^{\ell} \left(\frac{7}{12}\right)^{10-\ell}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der erste Spieler von den verbleibenden $10 - \ell$ Spielen mindestens $5 + \ell$ gewinnt, ist

$$\sum_{k=5+\ell}^{10-\ell} \binom{10-\ell}{k} \left(\frac{5}{7}\right)^{k} \left(\frac{2}{7}\right)^{10-\ell-k},$$

denn da wir nur noch Spiele betrachten, die Spieler zwei nicht gewinnt, gibt es jetzt nur noch 21 mögliche Ergebnisse, von denen 15 einen Gewinn für Spieler eins bedeuten und sechs ein unentschieden; in beiden Fällen läßt sich durch drei kürzen.

Die Wahrscheinlichkeit für ein verlustfreies Abschneiden von Spieler eins ist daher

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=0}^{2} \binom{10}{\ell} \left(\frac{5}{12}\right)^{\ell} \left(\frac{7}{12}\right)^{10-\ell} \sum_{k=5+\ell}^{10-\ell} \binom{10-\ell}{k} \left(\frac{5}{7}\right)^{k} \left(\frac{2}{7}\right)^{10-\ell-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{2} \sum_{k=5+\ell}^{10-\ell} \binom{10}{\ell} \binom{10-\ell}{k} \left(\frac{5}{12}\right)^{\ell} \left(\frac{7}{12}\right)^{10-\ell} \left(\frac{5}{7}\right)^{k} \left(\frac{2}{7}\right)^{10-\ell-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{2} \sum_{k=5+\ell}^{10-\ell} \binom{10}{\ell} \binom{10-\ell}{k} \left(\frac{5}{12}\right)^{\ell} \left(\frac{5}{12}\right)^{k} \left(\frac{2}{12}\right)^{10-\ell-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{2} \sum_{k=5+\ell}^{10-\ell} \binom{10}{\ell} \binom{10-\ell}{k} \left(\frac{5}{12}\right)^{k+l} \left(\frac{1}{6}\right)^{10-\ell-k} \approx 0{,}05901837951\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Ω sei eine Menge und $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung.

a) Zeigen Sie: Es gibt eine σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ mit der Eigenschaft: X ist genau dann eine Zufallsvariable bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$, wenn $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ist,

Lösung: X ist genau dann eine Zufallsvariable bezüglich $\mathcal{B}$, wenn $X^{-1}\big((-\infty,\ x)\big)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{B}$ liegt. Wie wir gesehen haben, gibt es eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$, die alle diese Mengen enthält, und X ist genau dann Zufallsvariable bezüglich $\mathcal{B}$, wenn $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ liegt.

b) Was ist $\mathcal{A}$ für $\Omega = \mathbb{R}$ und $X(\omega) = \omega^3$?

Lösung:

X ist bijektiv und monoton wachsend; $X^{-1}\big((-\infty,\ x)\big)$ ist also gleich $(-\infty,\ \sqrt[3]{x})$, und jedes Intervall $(-\infty,\ y)$ läßt sich mit $x = y^3$ in dieser Form schreiben. $\mathcal{A}$ enthält somit alle diese Intervalle und ist daher gleich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

c) Was ist $\mathcal{A}$ für $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $X(\omega) = \begin{cases} +1 & \text{für } \omega > 3 \\ -1 & \text{für } \omega \le 3 \end{cases}$?

Lösung: Urbilder von Intervallen der Form $(-\infty,\ x)$ sind hier offensichtlich genau die vier Mengen $\emptyset, \Omega, \{1,2,3\}$ und $\{4,5,6\}$. Diese bilden bereits eine σ-Algebra, d.h.

$$\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \Omega, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}\big\}\ .$$